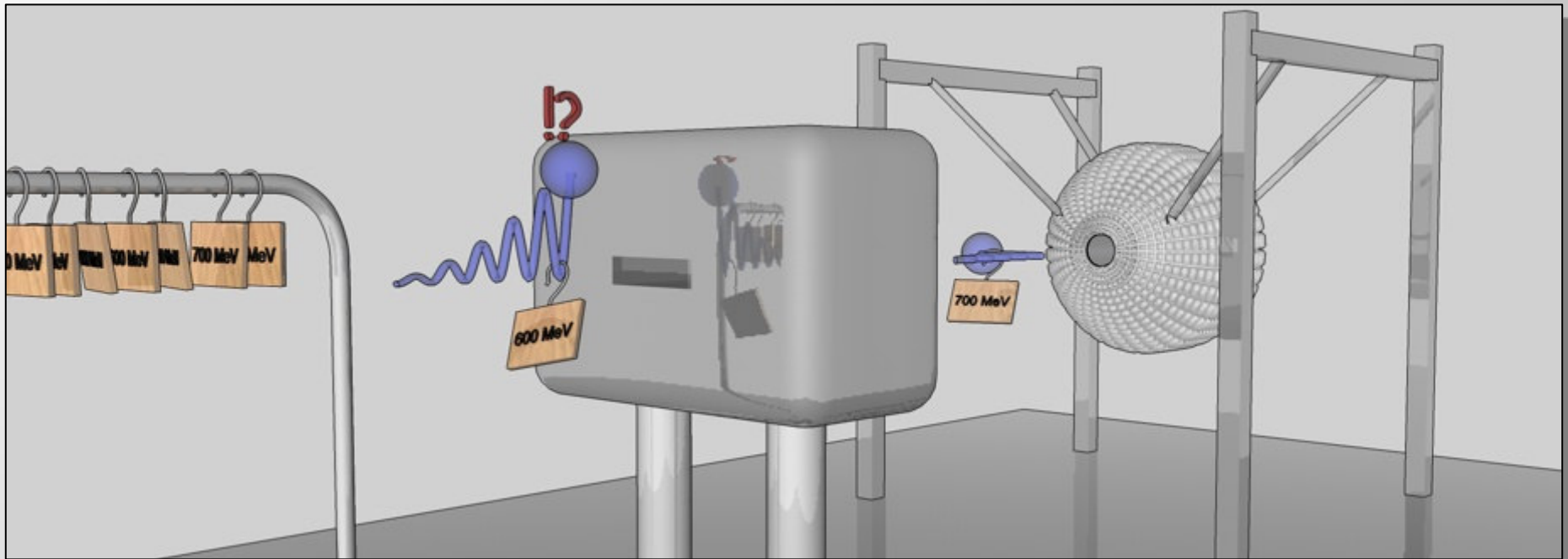


Teilchendetektoren und Experiment an ELSA

Erzeugung energiemarkierter Photonen

Photonenpolarisation

Photonenfluss



Übersicht

I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

a) Energiemarkierung

b) Produktionsmechanismen

II.) Polarisierung der Photonen

a) Linearpolarisation

b) Zirkulare Polarisation

c) Moeller-Polarimetrie

III.) Bestimmung des Photonenflusses

I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

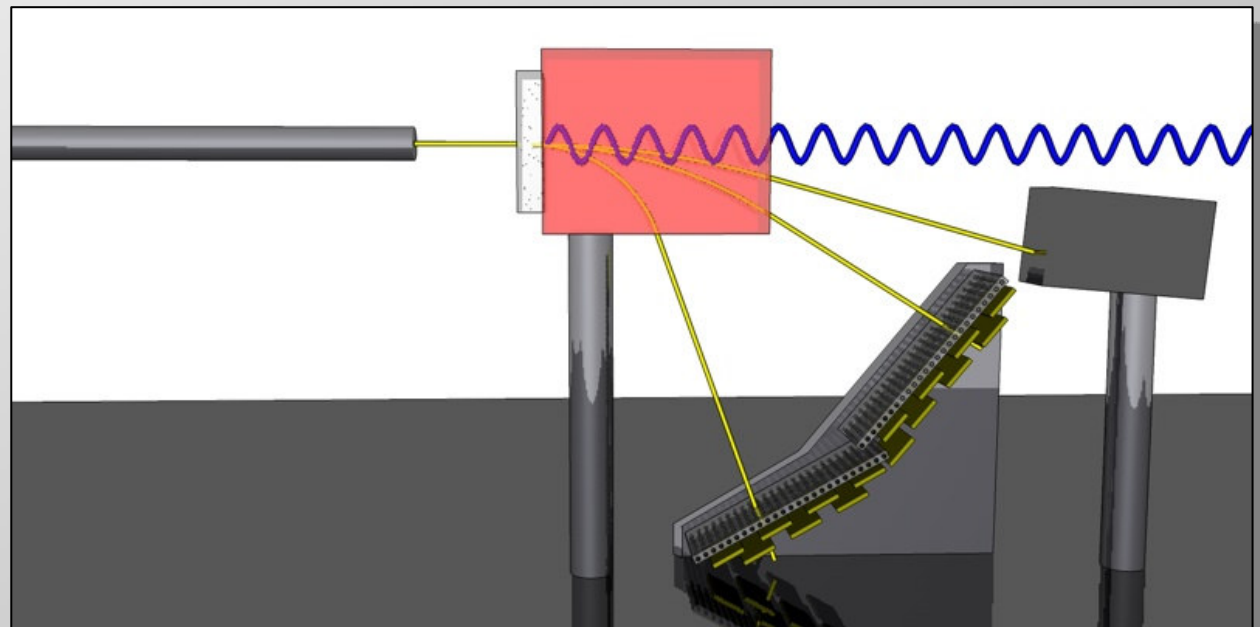
Folie 03

a) *Energiemarkierung*

- Das Taggingssystem unseres Experiments

- Aufgaben:
1. Produktion der Photonen
 2. Messung der Photonenenergie

Aufbau (Beispiel):



I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

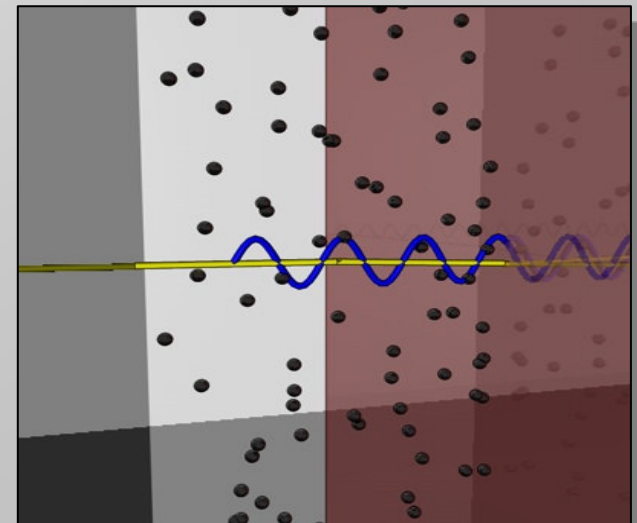
Folie 04

a) *Energiemarkierung*

- Taggingssystem: Bremsstrahltarget

- Elektronen aus Strahl treffen auf Radiator, erzeugen Photonen durch Bremsstrahlung.
- Radiatordicke bestimmt Bremsstrahlrate und Mehrfachstreureate
- Typische Dicke $\sim 1/1000$ Strahlungslängen
- Elektron verliert Energie durch Bremsstrahlung:

$$E_e = E_0 - E_\gamma \quad \Leftrightarrow \quad E_\gamma = E_0 - E_e$$

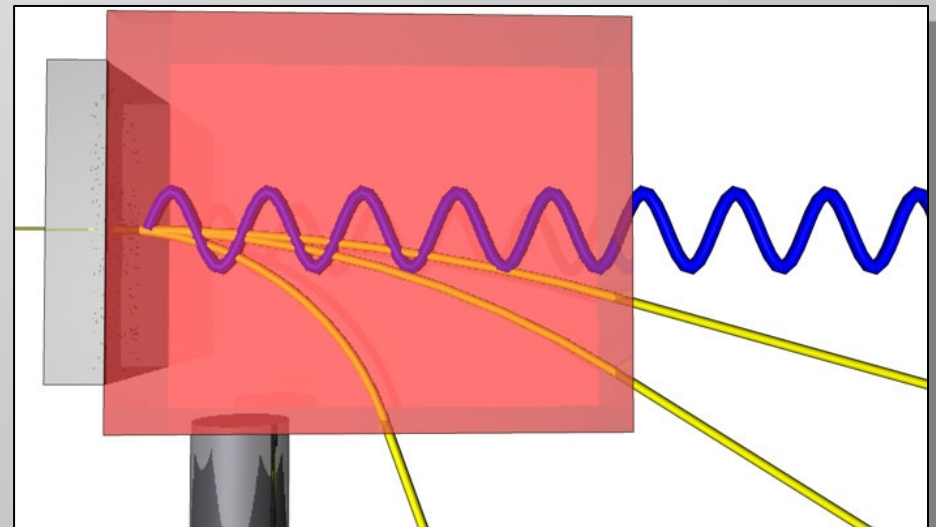


a) Energiemarkierung

- Taggingssystem: Taggingmagnet

- Trennt Elektronen (gestreute und ungestreute) von den Photonen
- Ungestreute: Geringe Ablenkung, Vernichtung im Beam-Dump
- Gestreute: Energieabhängige Ablenkung, Detektion im Tagginghodoskop
- Magnetfeld soll ungestreute Elektronen für alle Strahlenergien in Beamdump lenken
- Variiere Magnetfeld mit Strahlenergie

=> Von Strahlenergie unabhängiger Auftreffpunkt am Hodoskop!



a) *Energiemarkierung*

- Taggingssystem: Ablenkung im Magnetfeld

- Elektronen als geladene Teilchen werden abgelenkt

- Teilchen werden auf Kreisbahn gelenkt: $\vec{F}_{mag} = e\vec{v} \times \vec{B}$

- Gleichgewicht aus Zentripetal & Lorentzkraft ergibt Zusammenhang zwischen Kreisradius und Impuls (Magnetfeld senkrecht zum Impuls):

$$F_{mag} = evB = \frac{mv^2}{r} = F_{zp}$$

$$\Rightarrow p = eBr$$

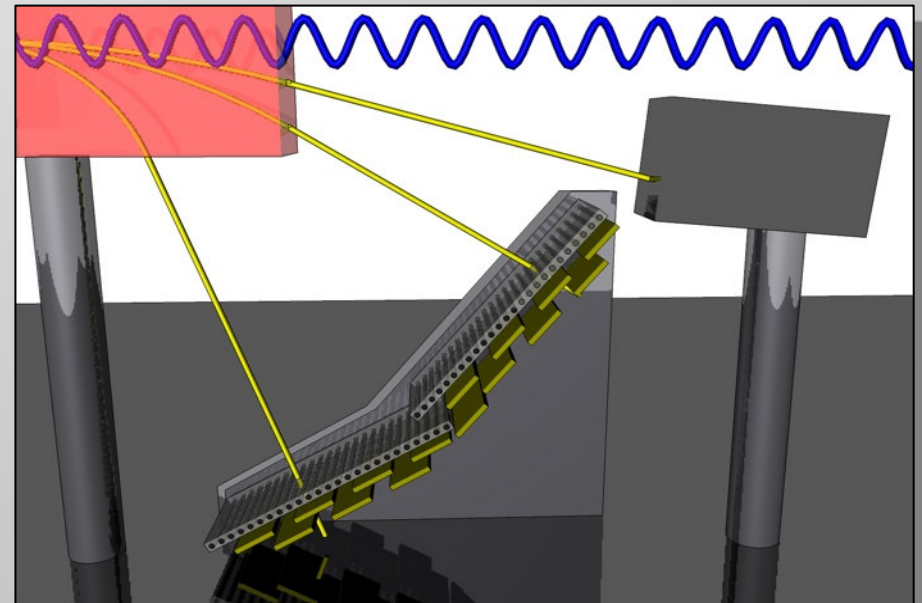
- Messung des Radius liefert mit bekannter Elektronenmasse die Energie des Elektrons

\Rightarrow Energie des Photons

a) *Energiemarkierung*

- Taggingssystem: Tagginghodoskop und Beamdump

- Hodoskop liefert Ortsinformation über gestreute Elektronen
- Besteht aus 14 Szintillationszählern (Zeitähler) und 2 Proportionaldrahtkammern (Ortsauflösung)
- In unserem Fall: Nur Zeitähler
- Beamdump vernichtet Elektronen, die keine Bremsstrahlung gemacht haben



a) Energiemarkierung

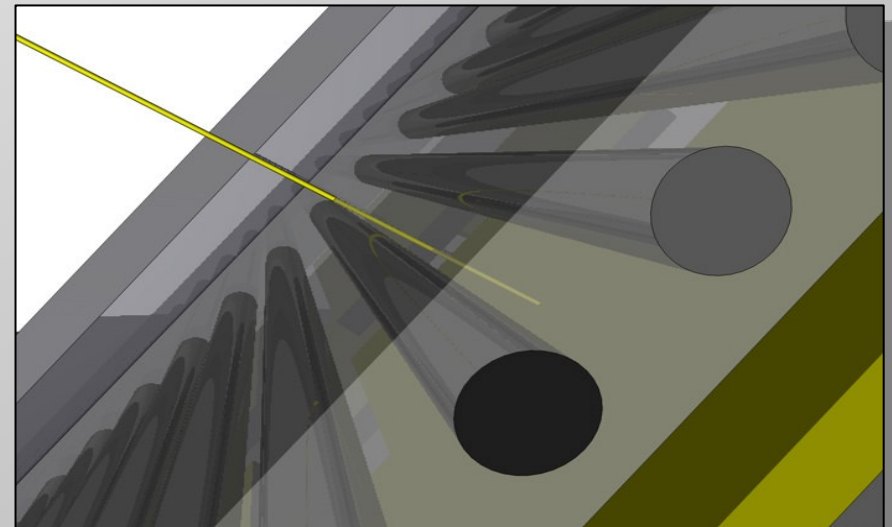
- Taggingssystem: Proportionaldrahtkammern

- Bestimmen die Ortsauflösung, bestehen aus 144 bzw. 208 Drähten.
 - Folien liegen auf negativer HV, Drähte auf Masse
- => Großer Feldgradient, Gasverstärkung

- Fehler auf Elektronenenergie (einziger) Faktor im Fehler für Photonenenergie:

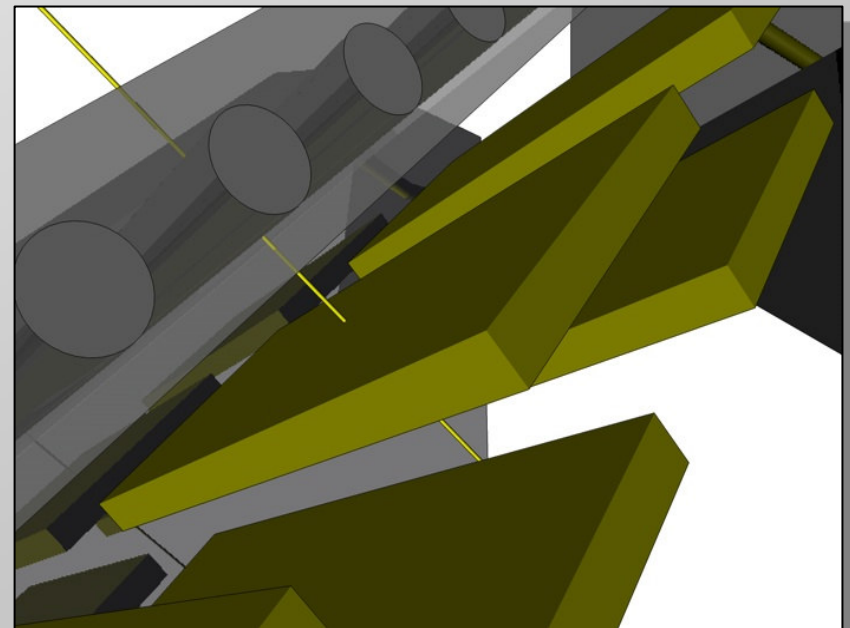
$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\sqrt{(\Delta E_0)^2 + (\Delta E_e)^2}}{E_0 - E_e}$$

Gemessener Ort und Fehler hängen direkt mit der Photonenenergie, ihrem Fehler und damit auch \sqrt{s} zusammen!



a) *Energiemarkierung*

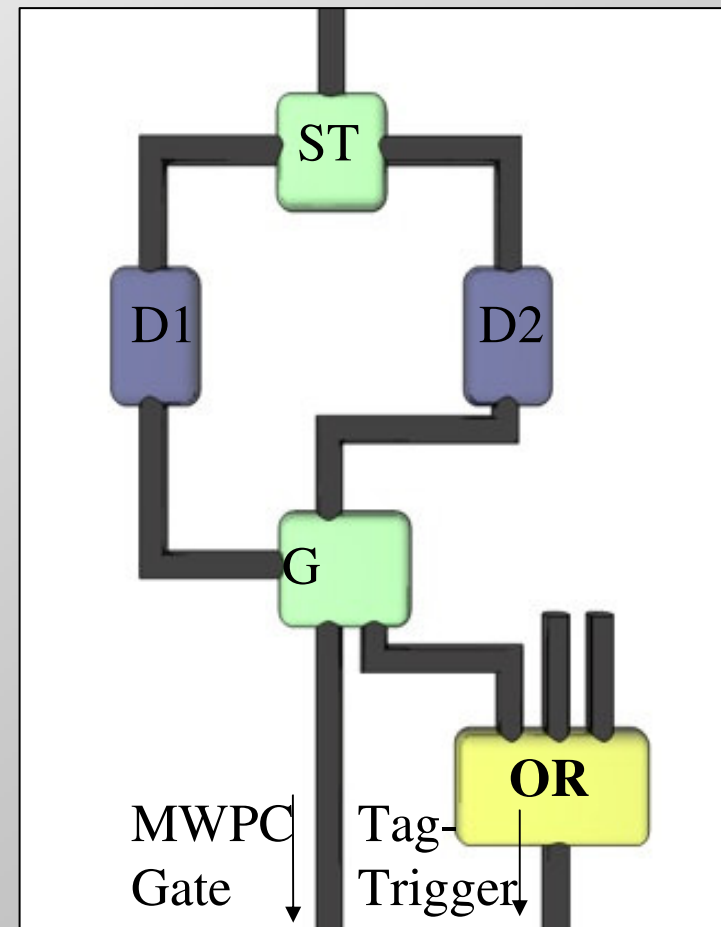
- Taggingssystem: Auslese der Zeitzähler
- Zeitzähler werden auf beiden Seiten ausgelesen
- Ausgelesene Signale werden zur Koinzidenz gebracht
- Unterdrückung des Rauschens
⇒ Wahrscheinlichkeit, dass zwei Photomultiplier gleichzeitig Rauschsignal liefern ist praktisch null.



a) Energiemarkierung

- Taggingssystem: Signal der Zeitzähler & Tag-Trigger

- a) Analogpuls wird im Signalteiler ST geteilt
- b) High-Low-Koinzidenz:
 - High-Kreis: Diskriminator D1 mit hoher Schwelle lässt nur echte Signale passieren
 - Low-Kreis: Niedrige Schwelle
 - Koinzidenz von High-Low: High öffnet Gate G für Low-Puls
- c) ODER der High-Low Koinzidenzen aller Zeitzähler bilden Tag-Trigger
- d) High-Low Koinzidenz eines Zählers bildet Auslese-Gate für entsprechende Drähte



a) *Energiemarkierung*

- Taggingssystem: Kalibration

Feste niedrige Energie (ab ca. 600 MeV aufwärts), kein Radiator, niedrige Rate:

- Stelle Strom durch Magneten auf Ablenkung zum Beamdump ein
- Erhöhe Strom durch Magneten → Stärkere Ablenkung → Simuliere somit geringere Elektronenenergie nach „Bremsstrahlung“
- Beispiel 1 GeV-Strahl:

B(1 GeV)	Beamdump
B(2 GeV)	50% Elektronenenergie
B(3 GeV)	33% Elektronenenergie, usw
- verringere Stahlenergie für Kalibration bei kleineren Elektronenenergien
- Aber: Strahlinstabilitäten bei zu kleinen Energien

I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

Folie 12

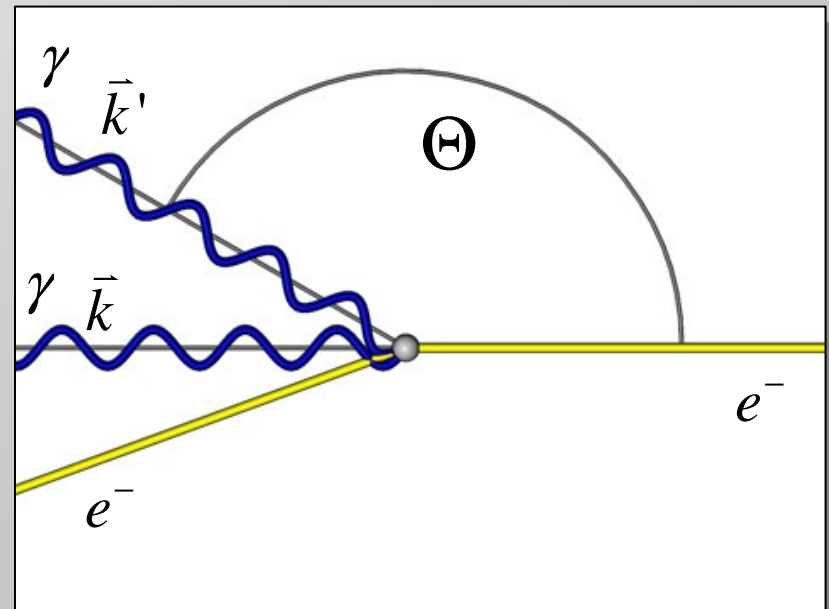
b) Produktionsmechanismen: Laser-Rückstreuung

- Laser-Rückstreuung

- Streuung von Laserphotonen an Elektronen aus Strahl unter 180°
- Photonenenergie stark winkelabhängig

$$k'(\Theta) = k \cdot \frac{1}{1 + \gamma \cdot (1 - \cos \Theta)}$$

$$k'(\Theta = \pi) = \frac{k}{1 + 2 \cdot \gamma}$$



b) Produktionsmechanismen: Laser-Rückstreuung

- Laser-Rückstreuung: Vor- und Nachteile

- Vorteile

- ⇒ Lineare und zirkulare Polarisation proportional zur Polarisation des Lasers, damit sehr hohe Polarisationen erreichbar
- ⇒ Energiespektrum der gestreuten Photonen variiert nur wenig mit Energie der einfallenden Photonen
- ⇒ Zwei Tagging Methoden

I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

Folie 14

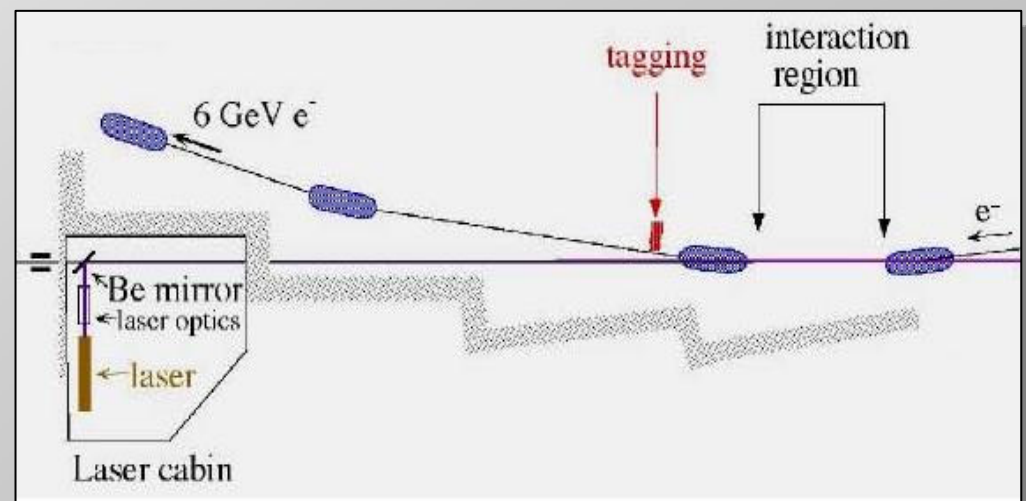
b) Produktionsmechanismen: Laser-Rückstreuung

- Laser-Rückstreuung: Vor- und Nachteile

- Vorteil: Zwei Tagging Methoden

⇒ Intern: Messe Abweichung der Elektronen von Sollbahn nach Bremsstrahlung

⇒ Extern: Elektronen werden nach Bremsstrahlung extrahiert und in Spektrometer analysiert.



b) Produktionsmechanismen: Laser-Rückstreuung

- Laser-Rückstreuung: Vor- und Nachteile
- Nachteile:
 - ⇒ Geringer Fluss ($\sim 10^3$ Hz)
 - ⇒ Damit: viel größere Messzeit nötig

I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

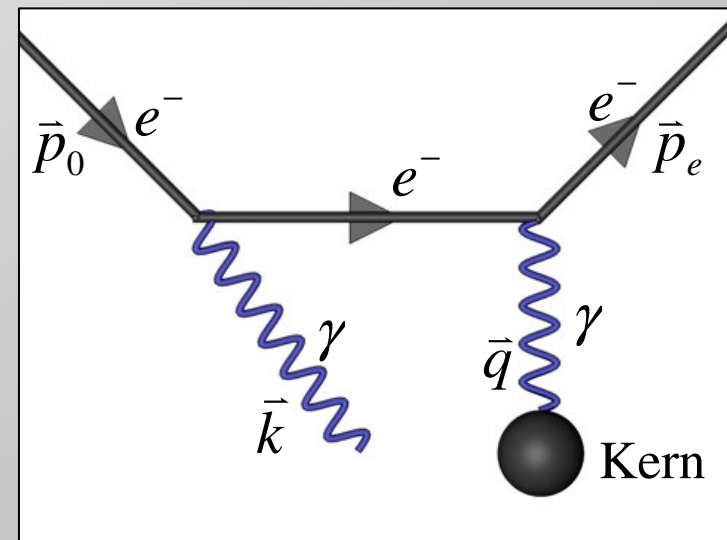
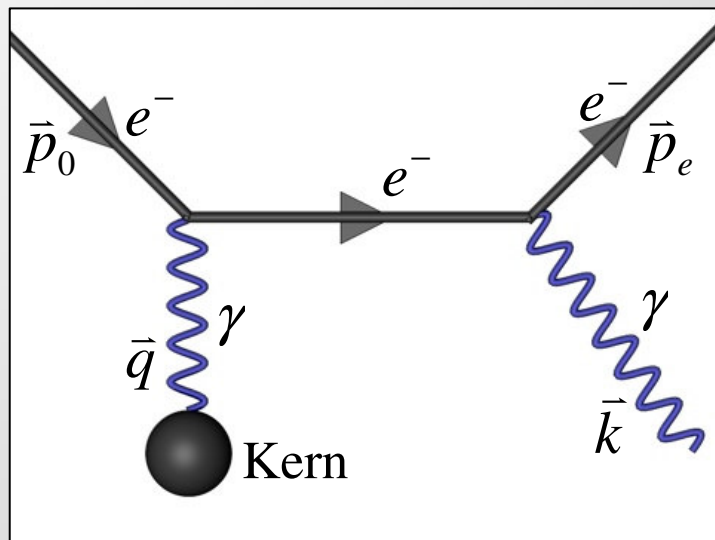
b) Produktionsmechanismen: Bremsstrahlung

- Bremsstrahlung im Feld eines Atomkerns

$$e^- + X \rightarrow e^- + X + \gamma$$

$$E_0 = E_e + T + E_\gamma$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_e + \vec{q} + \vec{k}$$



I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

Folie 17

b) Produktionsmechanismen: Bremsstrahlung

- Eigenschaften des Wirkungsquerschnittes der Bremsstrahlung

$$d\sigma \propto \frac{1}{|\vec{q}^4|}$$

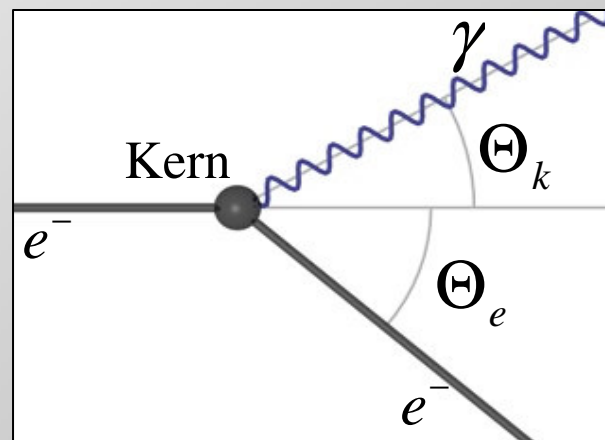
$$d\sigma \propto \frac{dk}{k}$$

$$\sqrt{\langle \Theta_k^2 \rangle} \approx \frac{1}{E_e}$$

-WQ aus Born'scher Näherung mit Potential

$$V(q) = -\frac{4\pi \cdot Ze^2}{\vec{q}^2}$$

-Näherung für Winkelverteilung im relativistischen Fall gültig.



I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

Folie 18

b) Produktionsmechanismen: Bremsstrahlung

- Abschirmung des Coulombfeldes & Atomformfaktor $F(q)$

- Ladung des Kerns wirkt abgeschirmt wenn Photonemission bei:

$$R_{\max} > a_0 \cdot Z^{\frac{1}{3}} \quad (\text{in diesem Fall beginnt Abschirmung durch Elektronen})$$

$$R_{\max} = \frac{1}{|\vec{q}_{\min}|} \quad |\vec{q}_{\min}| = |\vec{p}_0| - |\vec{p}| - |\vec{k}| \approx \frac{k}{2E_0 E_e}$$

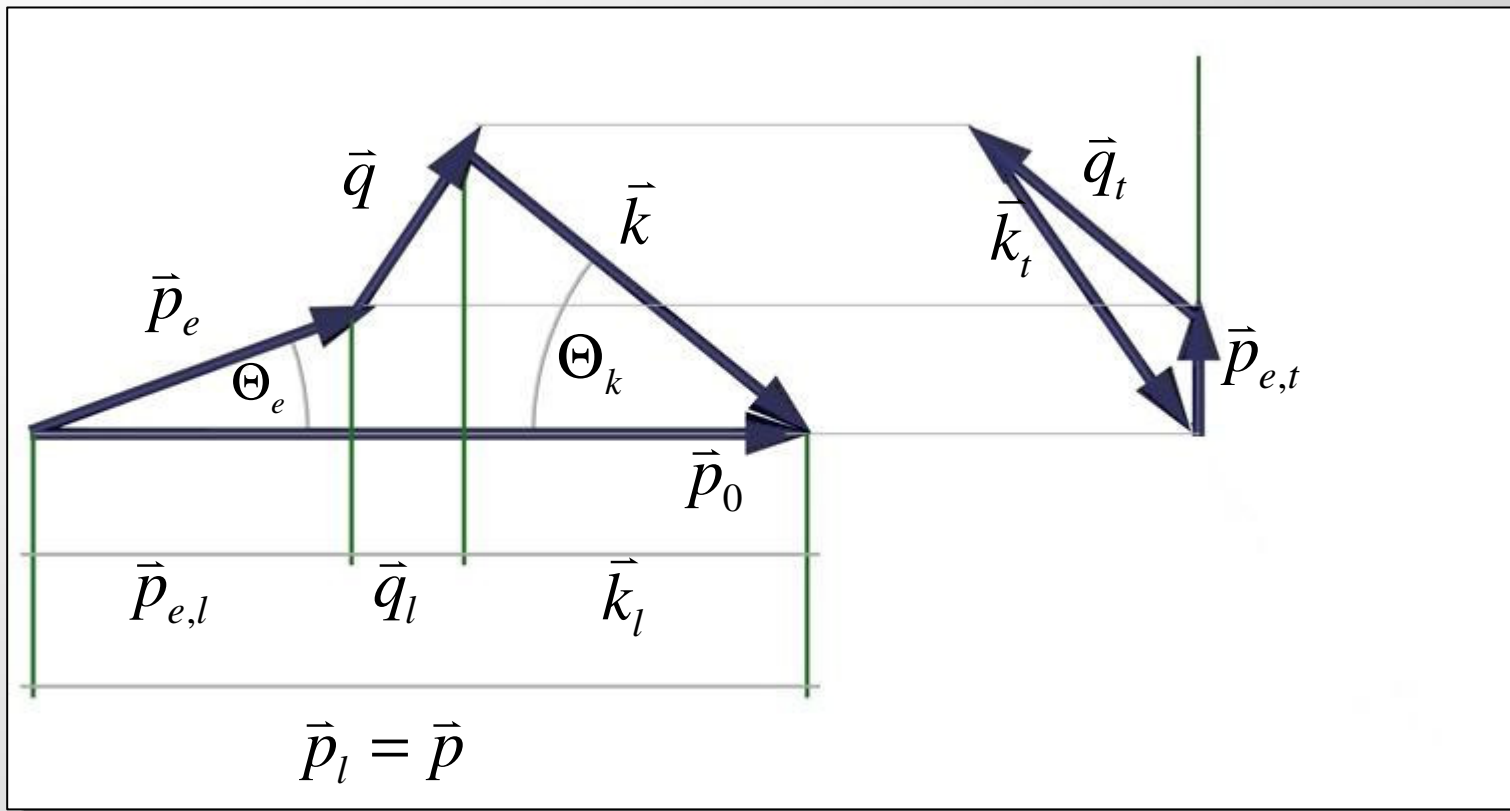
$$\Rightarrow R_{\max} = \frac{2E_0 E_e}{k} \geq a_0 \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

$$V'(q) = -\frac{4\pi \cdot e^2}{\vec{q}^2} \cdot (V(q) - F(q)) \quad F(q) = \int d^3 r (\rho(r) \cdot e^{-i\vec{q}\vec{r}})$$

I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

b) Produktionsmechanismen: Bremsstrahlung

- Kinematik der Bremsstrahlung



I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

b) Produktionsmechanismen: Bremsstrahlung

- Erlaubte Impulsüberträge q

Longitudinal:

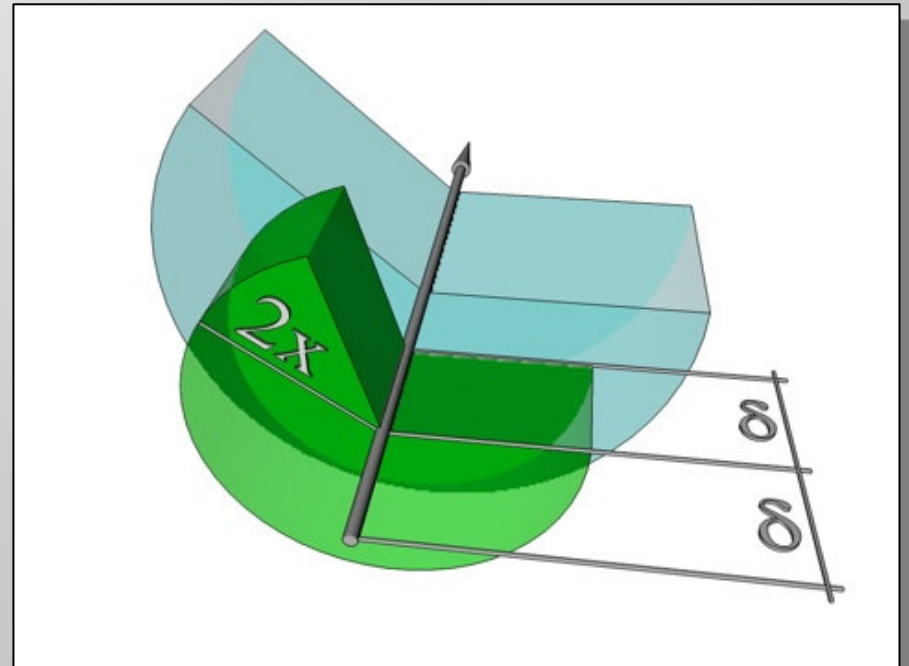
$$\vec{q}_{l,\min} \approx \frac{k}{2E_0 E} = \frac{1}{2E_0} \cdot \frac{x}{1-x} = \delta(x) \quad x = \frac{k}{E_0}$$

$$\vec{q}_{l,\max} \approx 2 \cdot \delta(x)$$

Transversal:

$$\vec{q}_{t,\min} = 0$$

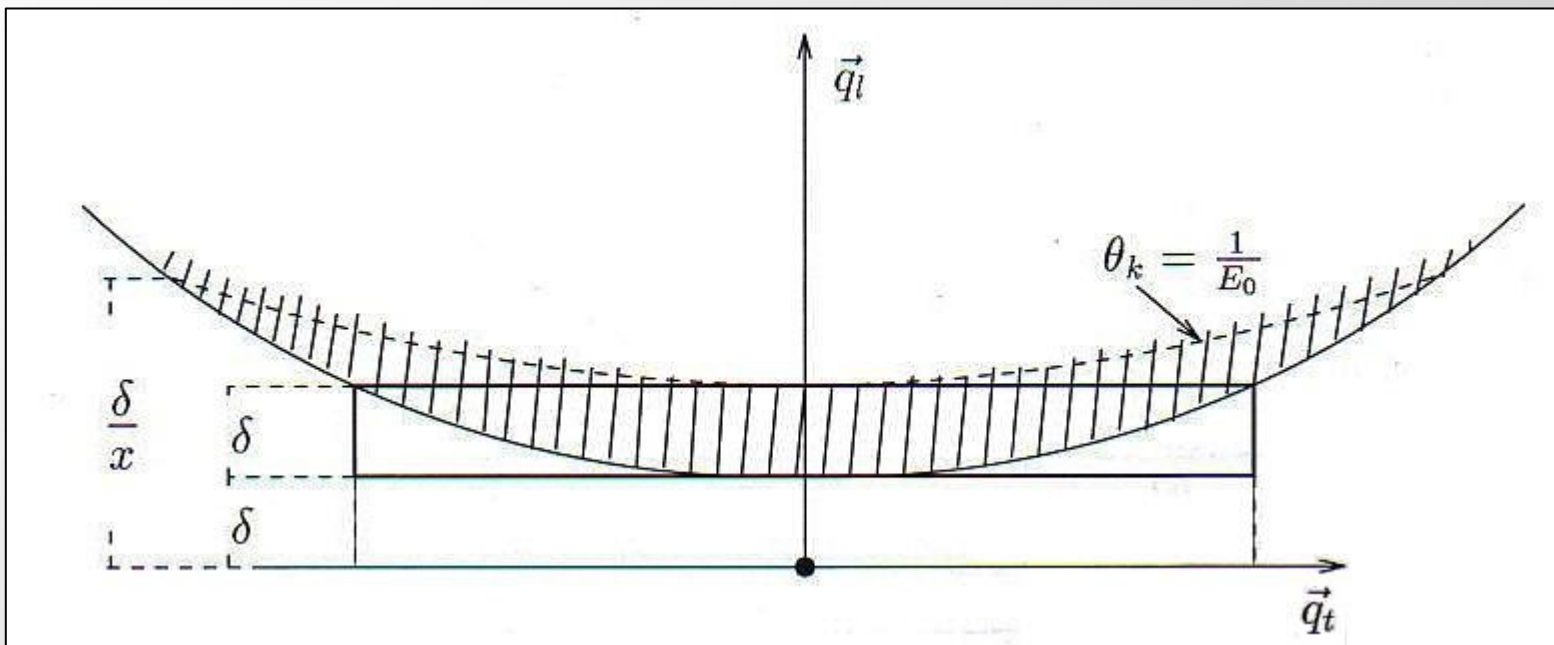
$$\vec{q}_{t,\max} = 2 \cdot x$$



I.) Erzeugung energiemarkierter Photonen

b) Produktionsmechanismen: Bremsstrahlung

- Graphische Darstellung der erlaubten Impulsüberträge q



Amorpher Radiator: „pancake“ kontinuierlich besetzt, kein Impulsübertrag ist ausgezeichnet.

$$\delta(x) \leq \vec{q}_l \leq 2 \cdot \delta(x)$$
$$0 \leq \vec{q}_t \leq 2 \cdot x$$

II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Bremsstrahlung am Kristall

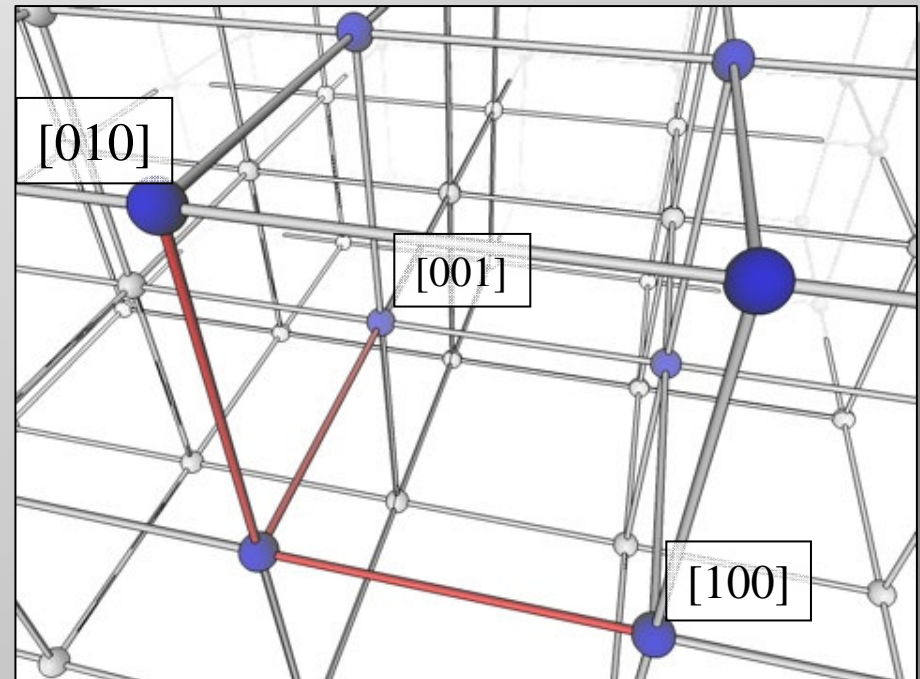
- Aufbau durch periodisches Gitter (Ortsraum \longrightarrow Fourier \longrightarrow Impulsraum)
- Gitter beschrieben durch Gittervektor (Impulsraum: reziproker Gittervektor)
- Bragg-Bedingung:

$$\vec{q} = \vec{g}$$

- Dieser Impulsübertrag wird vom gesamten Gitter übernommen

\Rightarrow Viele Atome nehmen am Prozess teil

\Rightarrow Kohärente Bremsstrahlung



a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- WQ der kohärenten Bremsstrahlung

- Potential erhält Kristallstruktur:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\# \text{Atome}} V(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- Nach Umformungen, Born'scher Näherung:

$$d\sigma_{\text{Kristall}} \propto \left\{ \sum_{\vec{g}} |S(g)|^2 \delta(\vec{q} - \vec{g}) \right\} \cdot d\sigma_{\text{Amorph}} \equiv D(\vec{q}) \cdot d\sigma_{\text{Amorph}}$$

- $|S(g)|^2$ Korrekturfaktor: Schließt gewisse rez. Gittervektoren aus

⇒ Für qualitative Diskussion nicht wichtig

- Zusätzliche Einschränkung an Impulsüberträge

- Neben Einschränkung der q auf „pancake“

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Debye-Faktor: Inkohärente Beiträge

- Beachte endliche Temperaturen \longrightarrow thermische Schwingungen um Ruhelage

$$\Rightarrow \vec{g} \rightarrow \vec{g}(\vec{r}, t)$$

-Wahrscheinlichkeit für kohärente Bremsstrahlung:

$$f(q^2) = \exp(-A(T) \cdot \bar{q}^2)$$

$$\text{wobei } A(T) \propto \frac{T}{\Theta}$$

mit Θ : Debye-Temperatur

\Rightarrow Verwende Kristalle mit großer Debye-Temperatur

$$\Rightarrow d\sigma_{\text{Kristall}} = \left[f(\bar{q}^2) \cdot D(\bar{q}) + (1 - f(\bar{q}^2)) \cdot N \right] \cdot d\sigma_{\text{Brems}}$$

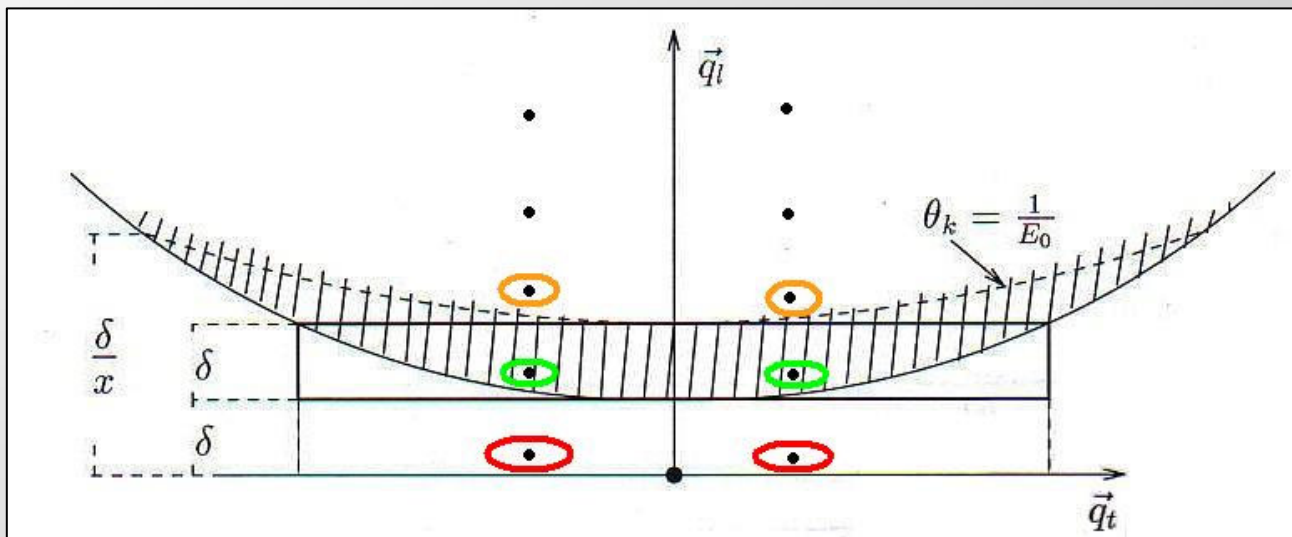
II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Erlaubte Impulsüberträge in kohärenter Bremsstrahlung

- Feste Strahlenergie: Steigende Photonenenergie

$$\Rightarrow \delta(x) = \frac{x}{1-x} \quad x = \frac{k}{E_0} \quad \text{wächst.}$$



Impulsübertrag muss:

- Kinematisch möglich sein
- Einem Reziproken Gittervektor entsprechen

II.) Polarisation der Photonen

Folie 26

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

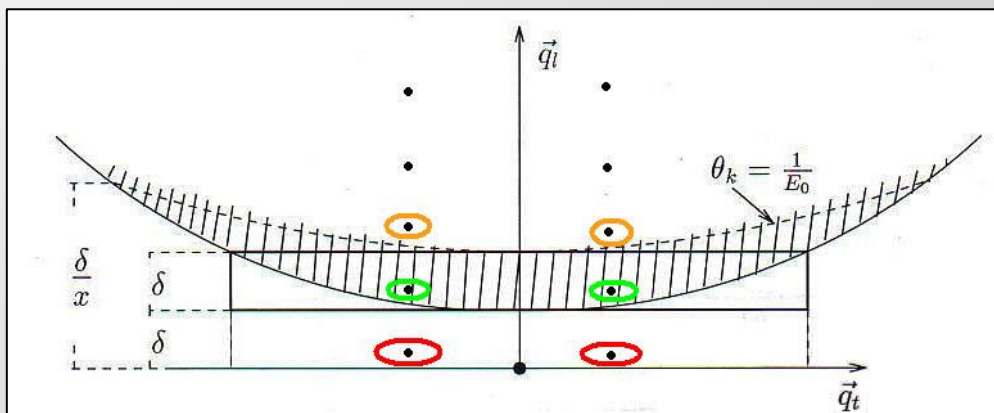
- Erlaubte Impulsüberträge in kohärenter Bremsstrahlung

- Feste Strahlenergie: Steigende Photonenenergie \longrightarrow Untere Kante wächst

\Rightarrow Orange markierte Punkte rücken näher an den erlaubten Bereich.

\Rightarrow Grün markierte Punkte tragen abrupt nicht mehr bei, wenn sie unter die Kante rutschen

\Rightarrow Amorpher Radiator: „kontinuierlicher“ Aus/Eintritt in kin. mögliche Zone.



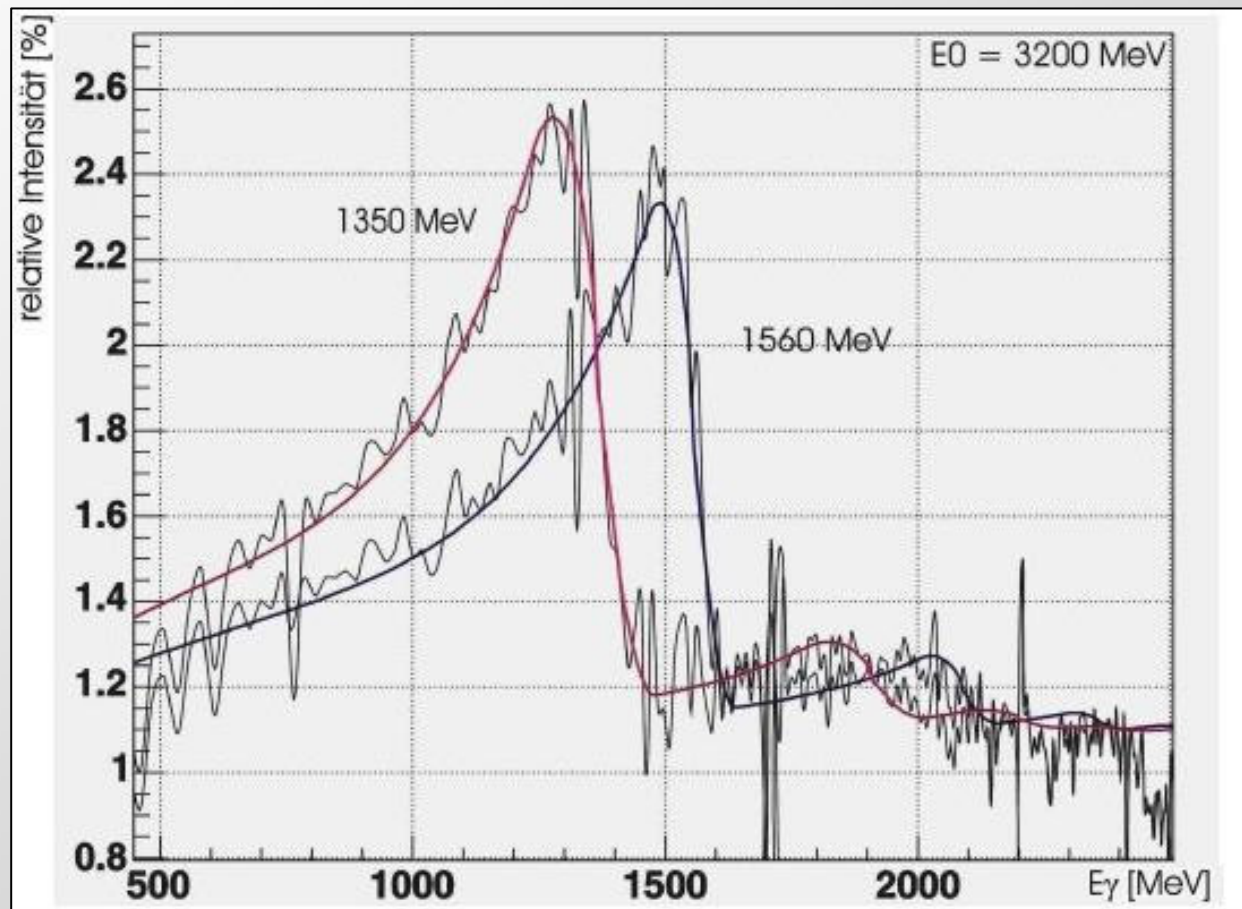
Kontinuierliche Intensitätszunahme bei Eintreten in erlaubten Bereich.

Unstetiger Intensitätseinbruch bei Verlassen des kinematisch möglichen Bereichs.

II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Intensitätsabhängigkeit von relativer Photonenenergie



II.) Polarisation der Photonen

Folie 28

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Orientierungen des Kristalls im Strahl

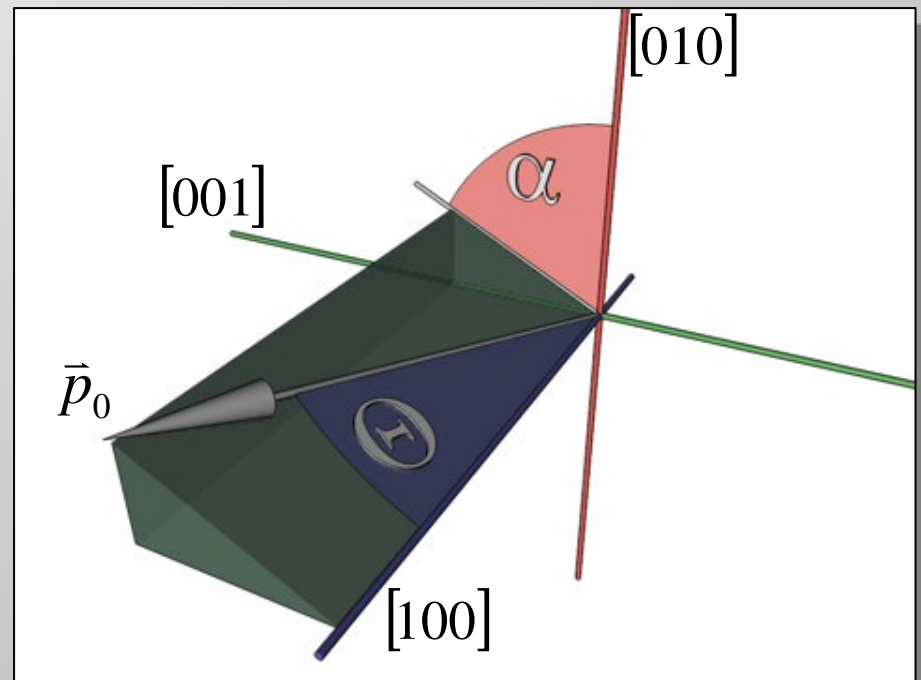
- $\alpha = 0$ und $\theta = 0$: $\vec{p}_0 \parallel [100]$ entspricht „Nullrichtung“

- Ziel: Nur ein rez. Gittervektor trägt zur Bremsstrahlung bei

- Allgemein: Alle rez. Gittervektoren im kin. möglichen Bereich tragen zum kohärenten Anteil bei

- Betrachte nur kleine Gittervektoren kürzer als $[004]$, da:

$$d\sigma \propto \frac{1}{|\vec{q}^4|} = \frac{1}{|\vec{g}^4|}$$

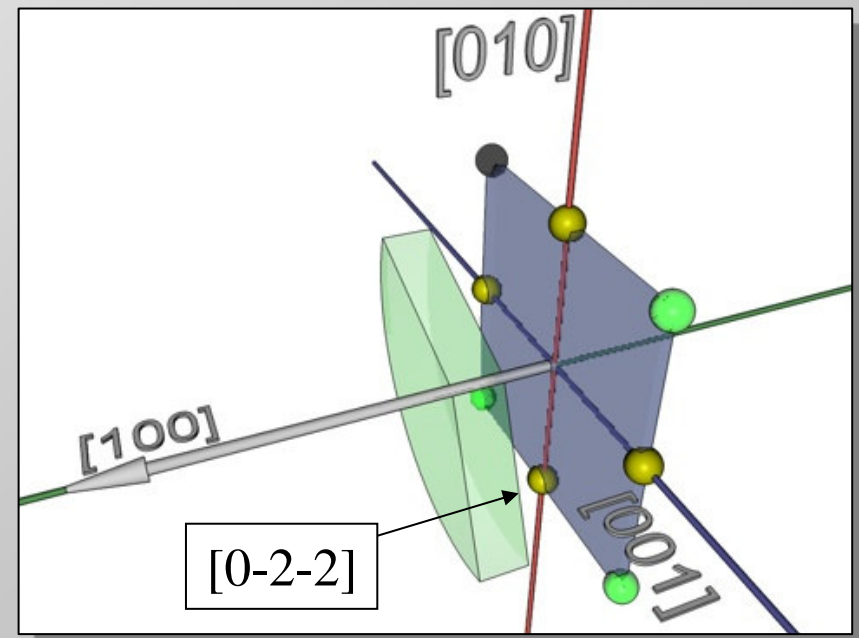
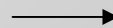
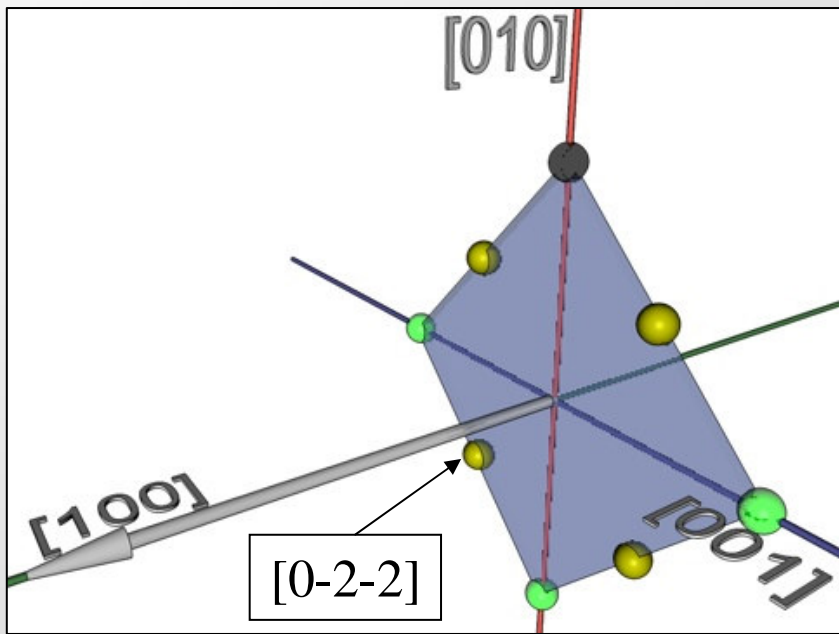


II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Ausrichtung des Kristalls für polarisierte Photonen

- Wähle $\alpha \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$ und $\theta \neq 0$
- Drehe zunächst um $[100]$, um 45°



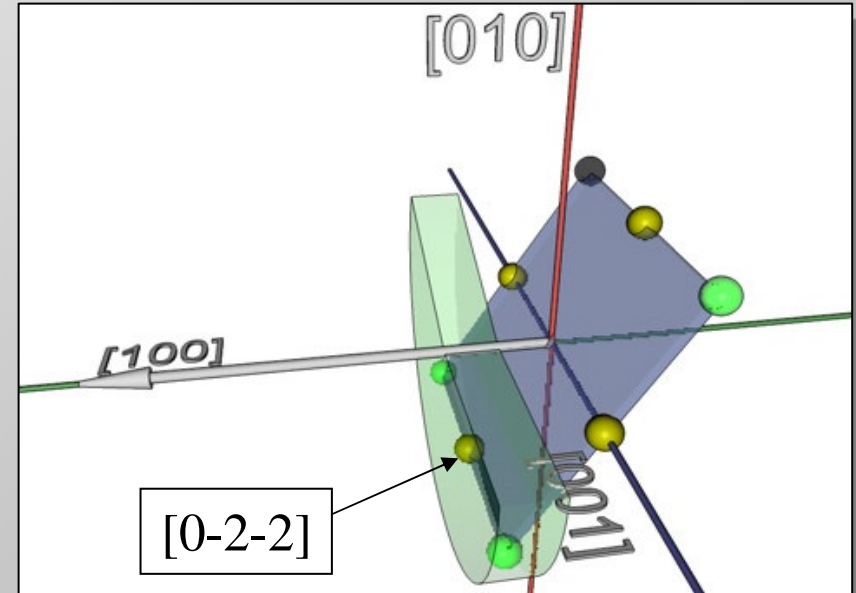
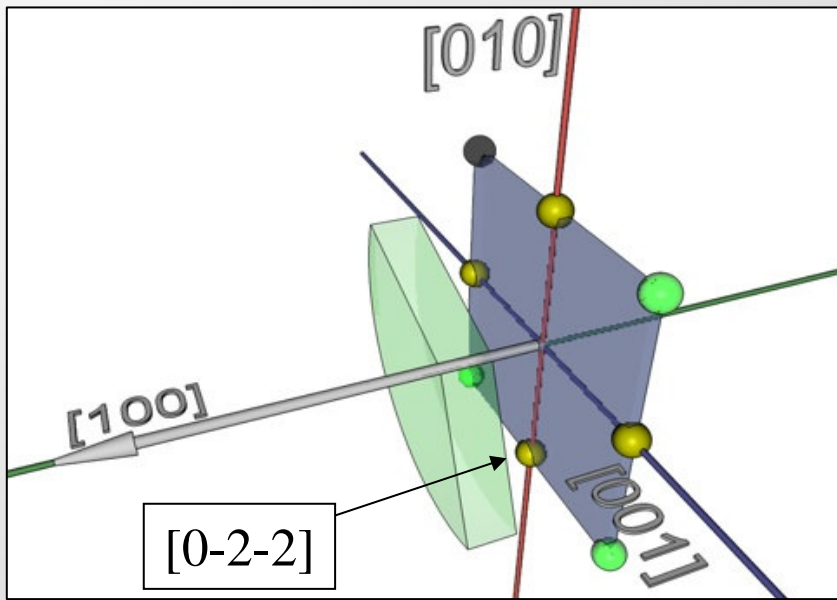
II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Ausrichtung des Kristalls für polarisierte Photonen

- Wähle $\alpha \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$ und $\theta \neq 0$

- Danach werden die rez. Gittervektoren $[00-4]$, $[0-2-2]$ und $[0-40]$ durch Drehung um die $[001]$ -Achse in den erlaubten Bereich gedreht.



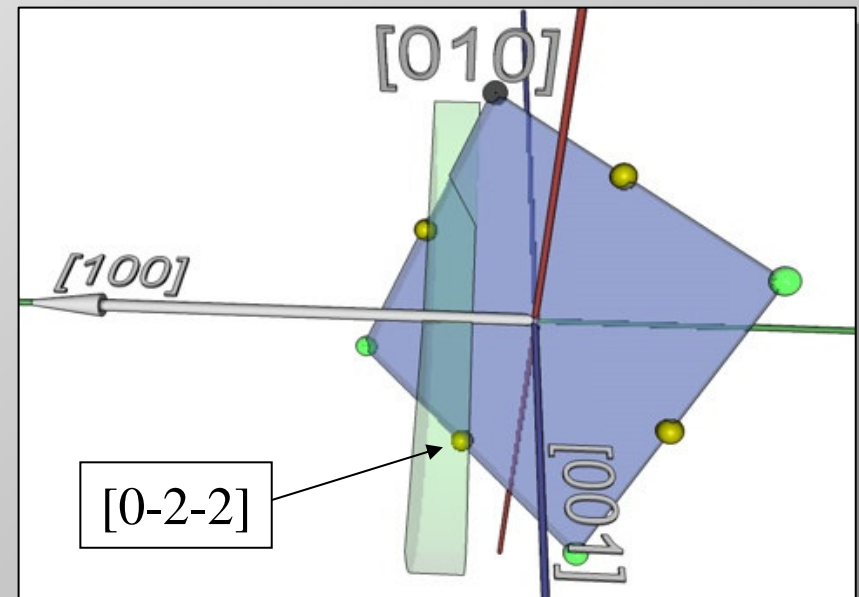
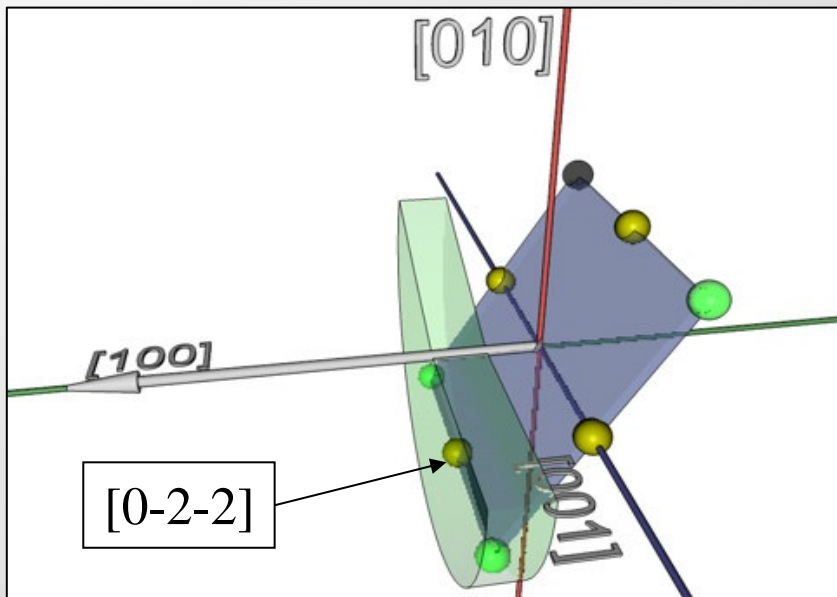
II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Ausrichtung des Kristalls für polarisierte Photonen

- Wähle $\alpha \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$ und $\theta \neq 0$

- Zum Abschluss wird [0-2-2] an die untere Kante des „pancake“ gebracht, durch Drehung um die [010]-Achse

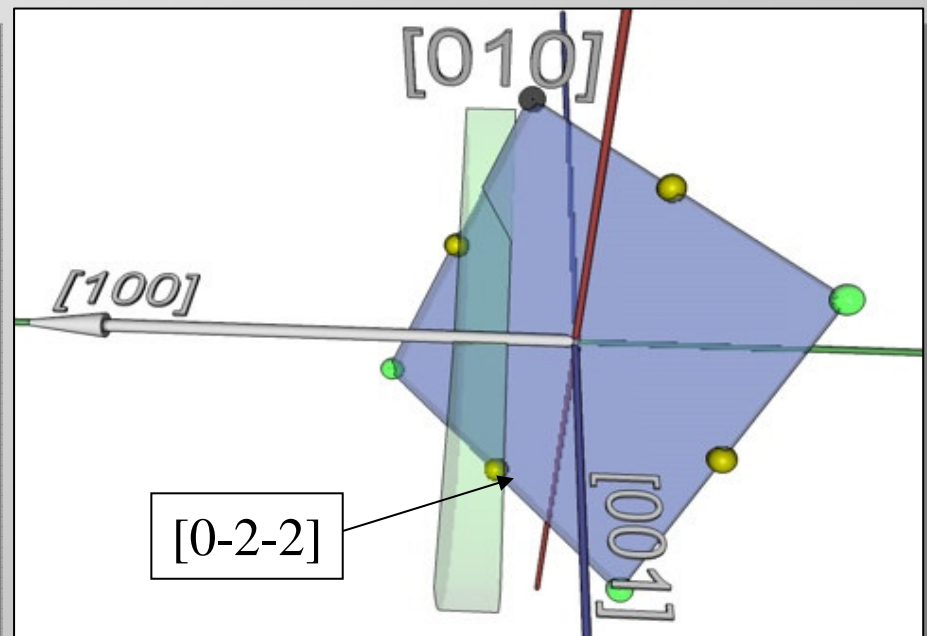
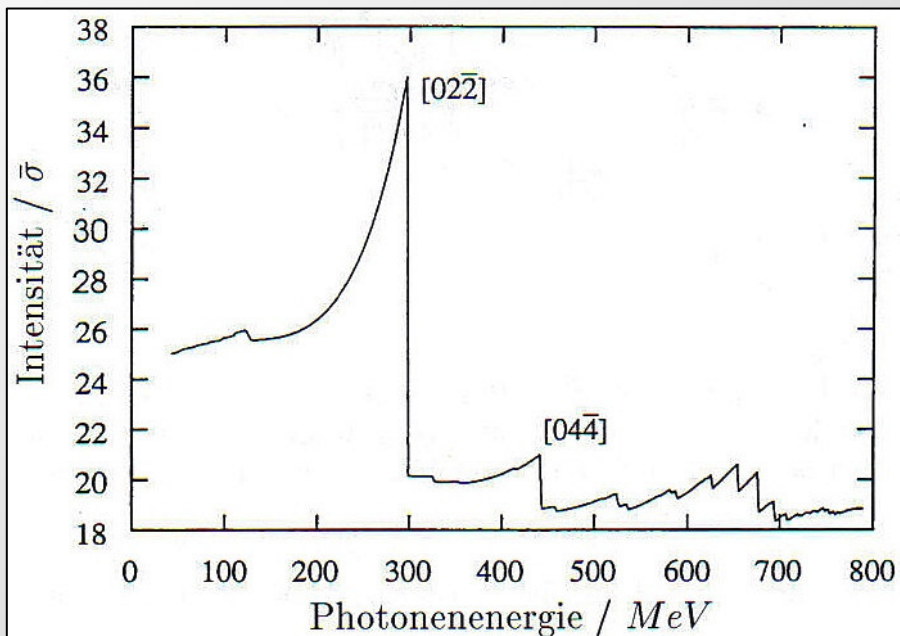


II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Spektrum des ausgerichteten Kristalls

- Größter Beitrag zum WQ nun von $\vec{q} = \vec{g} = [0-2-2]$
- Polarisierte Photonen in der durch (\vec{q}, \vec{p}_0) aufgespannten Ebene.



II.) Polarisation der Photonen

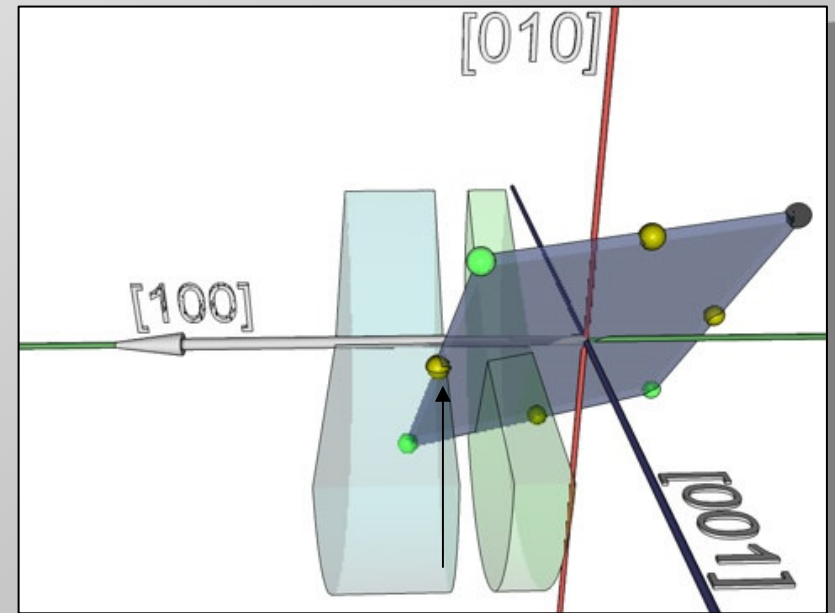
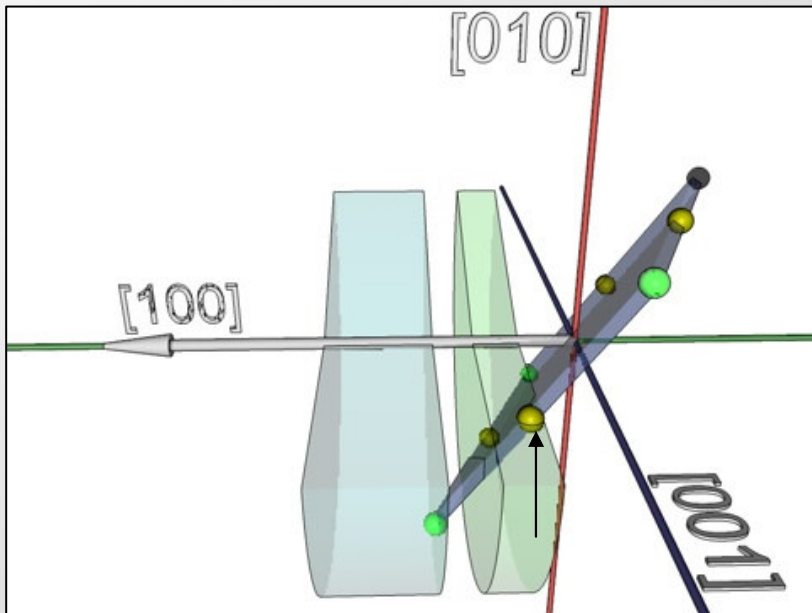
Folie 33

a) *Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung*

- Polarisation bei höheren Photonenenergien

- Verschiebung der Diskontinuitätsstelle zu höheren Photonenenergien durch weitere Drehung

- Rez. Gittervektor wird in Bereich der höheren Energien gedreht (hier um $[010]$).



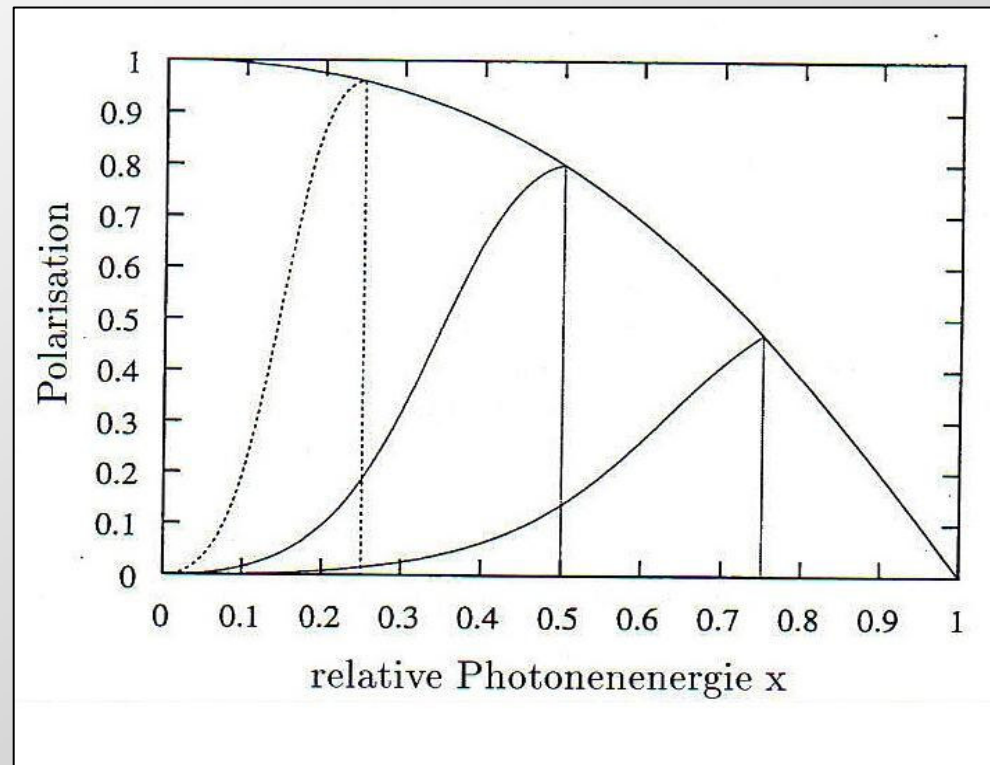
II.) Polarisation der Photonen

Folie 34

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Polarisationsgrad

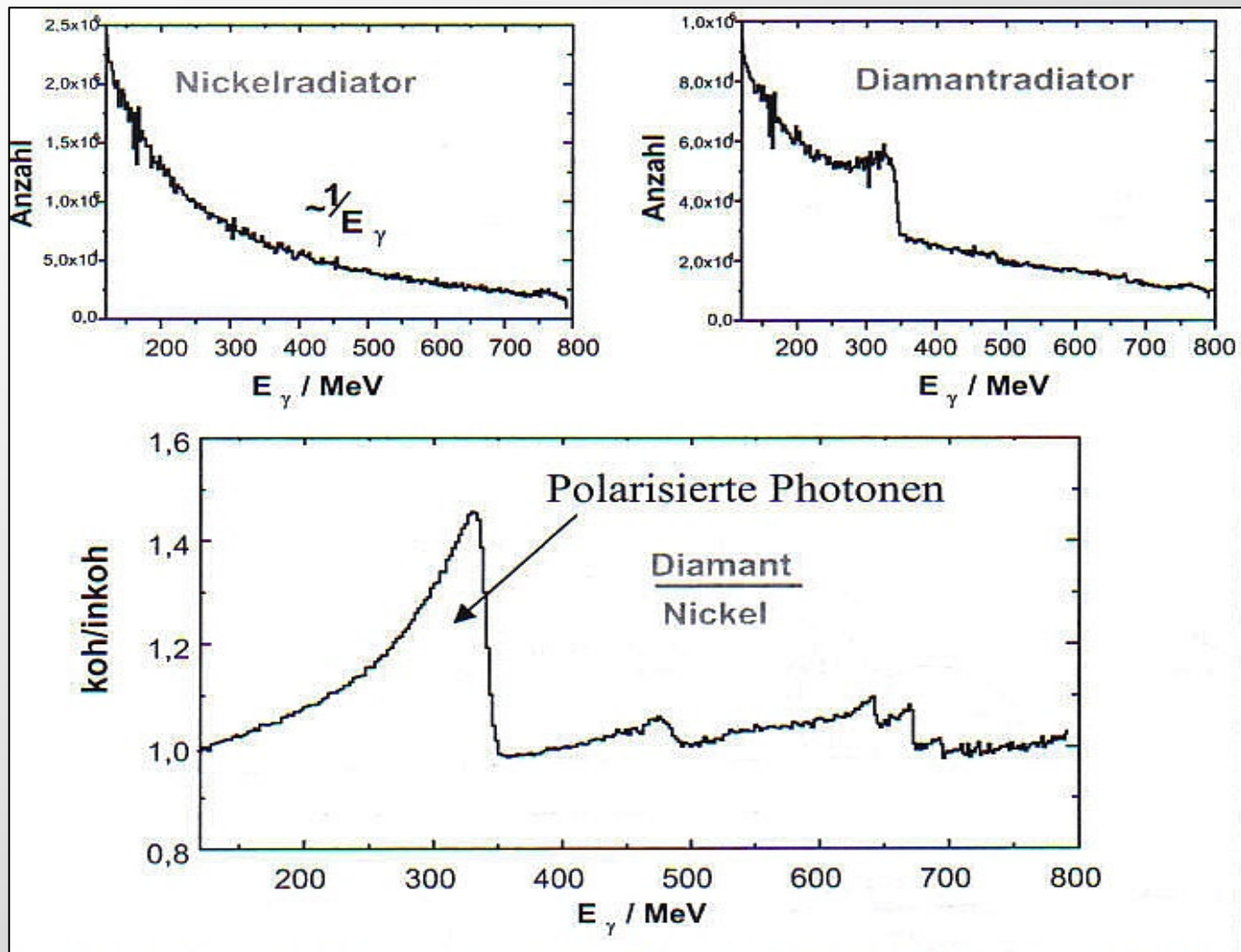
- Polarisation maximal wenn ausgezeichneter rez. Gittervektor maximal beiträgt



II.) Polarisation der Photonen

a) Linearpolarisation durch kohärente Bremsstrahlung

- Messung des Polarisationsgrades



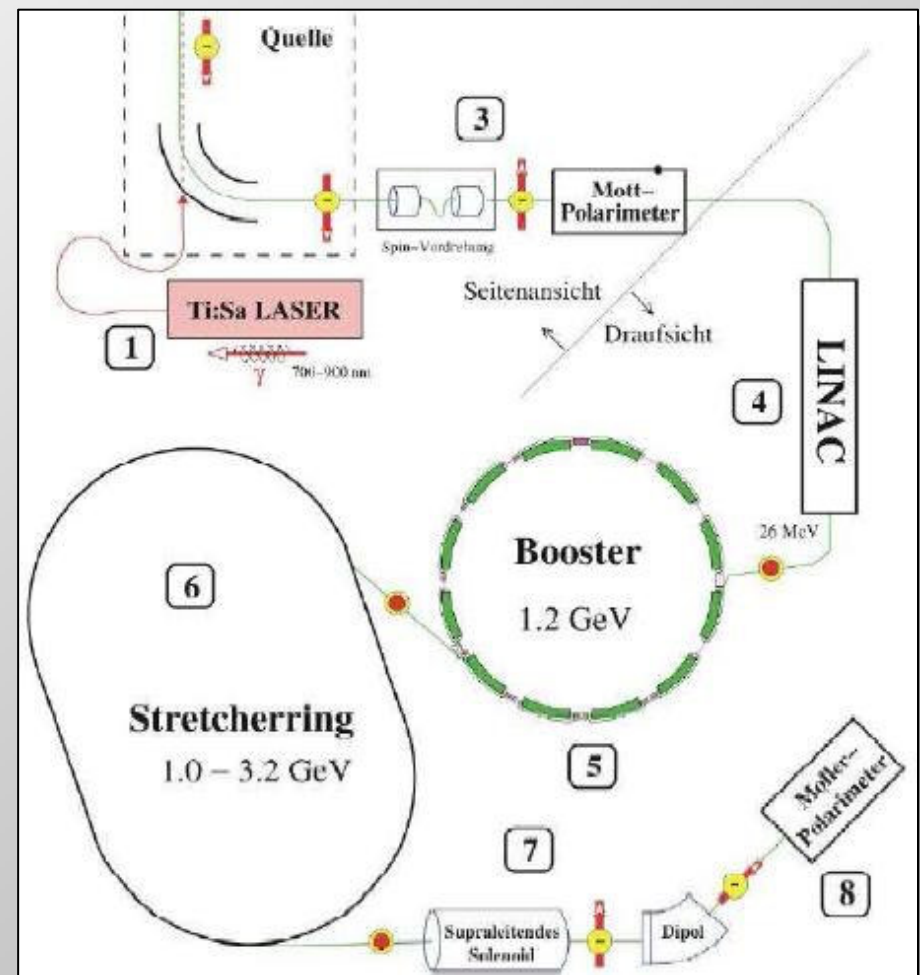
II.) Polarisation der Photonen

Folie 36

b) Zirkularpolarisation durch polarisierte Elektronen

- Zirkular polarisierte Photonen

- Zirkulare Photonenpolarisation durch Bremsstrahlung longitudinal polarisierter Elektronen
- Longitudinalpolarisation der Elektronen für den Beschleuniger sehr aufwendig



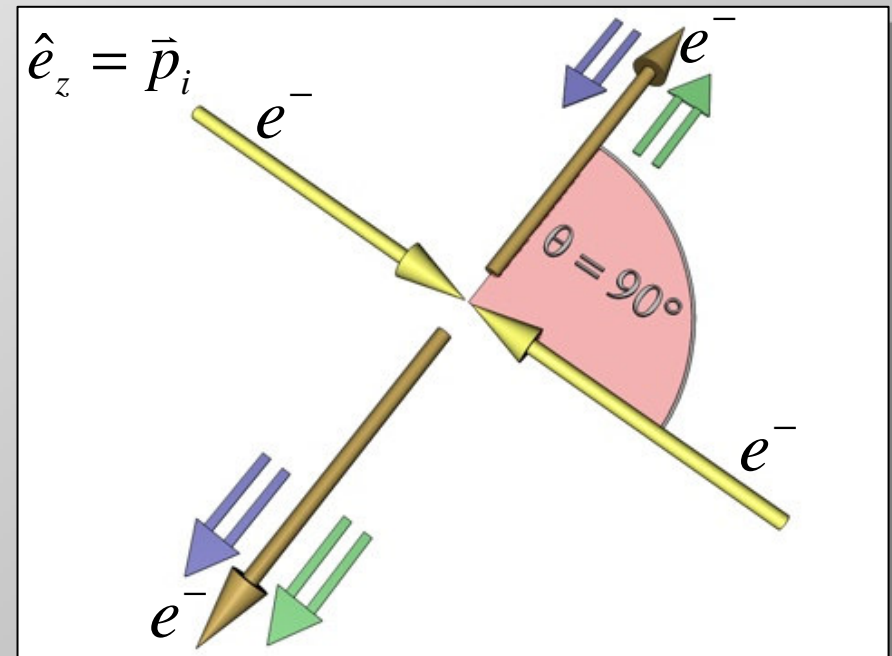
II.) Polarisation der Photonen

Folie 37

c) Moeller-Polarimetrie

- Idee der Moeller-Polarimetrie

- Methode um die Polarisation der Elektronen zu messen
- Basiert auf Moellerstreuung (spin-abhängig): $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$
- Spins parallel \rightarrow Spinfunktion sym.
 \Rightarrow Ortsfunktion antisymmetrisch
 \Rightarrow Kann in Polynome ungerader Ordnung entwickelt werden
 \Rightarrow Diese verschwinden bei $\Theta = 90^\circ$



c) Moeller-Polarimetrie

- Wirkungsquerschnitt der Moeller-Polarimetrie

- Wirkungsquerschnitt besteht aus zwei Anteilen (Näherung für große Energien):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \right) \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^3 a_{jj}(\Theta) P_j^S P_j^T \right]$$

Darin: - Analysierstärkekoeffizient a_{jj} : $a_{33} \gg a_{11}, a_{22}$

- j-Komponente der Target (T) und Strahlpolarisation (S) P_j^T, P_j^S

c) Moeller-Polarimetrie

- Messung der Strahlpolarisation

- Zählratenasymmetrie:

$$A = \frac{\sigma^{\uparrow\downarrow} - \sigma^{\uparrow\uparrow}}{\sigma^{\uparrow\downarrow} + \sigma^{\uparrow\uparrow}} = \frac{N^{\uparrow\downarrow} - N^{\uparrow\uparrow}}{N^{\uparrow\downarrow} + N^{\uparrow\uparrow}} = a_{11}P_1^S P_1^T + a_{22}P_2^S P_2^T + a_{33}P_3^S P_3^T$$

- Polarisierende Radiatorfolie durch Magnetisierung in Folienebene,

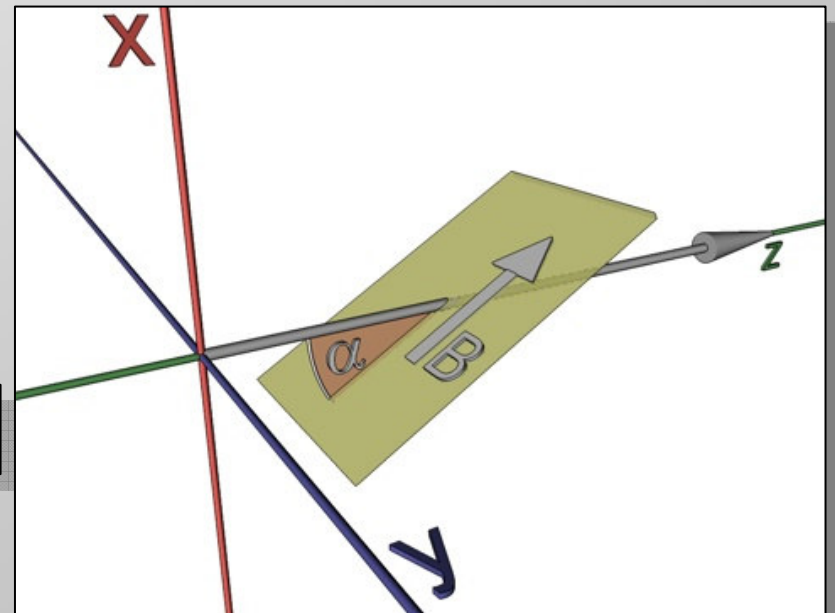
$$P_1^T = P^T \cdot \sin \alpha \quad P_3^T = P^T \cdot \cos \alpha$$

- Damit wird die Zählratenasymmetrie zu:

$$A(\alpha) = a_{11}P_1^S (P^T \sin \alpha) + a_{33}P_3^S (P^T \cos \alpha)$$

Addition von $A(\alpha)$ und $A(-\alpha)$

eliminiert $\sin(\alpha)$ -Term



c) Moeller-Polarimetrie

- Messung der Strahlpolarisation

- Messung der Zählratenasymmetrie durch Koinzidenzmessung der beiden gestreuten Elektronen

- Vorteil: Moellerpolarimetrie kann parallel zur Datennahme laufen

⇒ vgl. Messung der Linearpolarisation: spezieller Radiator verwendet

III.) Bestimmung des Photonenflusses

- Der Photonenfluss

- „Die Anzahl der im Radiator erzeugten Photonen, die das Target durchqueren.“

- Naiv: $N_\gamma = N_{e,T}$ (im idealen Fall)

⇒ Tagger-Effizienz eins, kein Untergrund, keine Photonverluste

⇒ Nicht realisierbar

- Ansatz: $N_\gamma = N_{e,T} \cdot P_\gamma$

⇒ Alle im Radiator erzeugten Photonen erreichen Target mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit → Photon-Definitionswahrscheinlichkeit.

III.) Bestimmung des Photonenflusses

- Die Photon-Definitions-wahrscheinlichkeit

- „Wahrscheinlichkeit, mit der das zu einem Signal im Tagger gehörende Photon das Target erreicht“

- Photon hinterlässt Elektron im Tagger & Signal im Photodetektor hinter Target

$$P_{\gamma} = \frac{N_e \wedge N_{\gamma}}{N_e}$$

- $P_{\gamma} < 1$, da:

⇒ nicht alle Photonen der Bremsstrahlung unter 0° emittiert werden,

⇒ Elektronen aus dem Strahl elastisch an Hüllenelektronen der Radiatoratome streuen und in das Hodoskop gelangen können.

III.) Bestimmung des Photonenflusses

- Zusammenhang mit dem Wirkungsquerschnitt

- Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\text{\# der in } dA \text{ gestreuten Teilchen / Zeit}}{\text{\# der einfallenden Teilchen / (Zeit \& Fläche)}} = \frac{|j_{streu}|}{|j_{ein}|} \cdot dA$$

- $|j_{ein}|$ entspricht dem Fluss einfallender Teilchen, hier: Photonen

⇒ Direkter Zusammenhang zwischen WQ und Photonenfluss.

Zusammenfassung I

- Energiemarkierung

- Erzeugung der Photonen über Bremsstrahlung
- Indirekte Messung der Photonenenergie über Elektronenenergie
- Energie rekonstruierbar durch Auftreffpunkt im Hodoskop nach Ablenkung

- Bremsstrahlung

- Spektrum der Photonen folgt $\sim 1/\text{Energie}$, Emission in Vorwärtsrichtung
- Linearpolarisation durch Bremsstrahlung an Kristall \rightarrow Bragg-Bedingung

Zusammenfassung II

- Polarisation

- Lineare Polarisation über Bremsstrahlung an Kristall

⇒ Charakteristisches Spektrum durch Intensitätseinbrüche

- Zirkulare Polarisation durch Bremsstrahlung longitudinal polarisierter Elektronen

⇒ Messung über die spin-abhängige Moeller-Streuung

- Photonenfluss

- Anzahl der Photonen aus Bremsstrahlung, die das Target durchqueren
- Anzahl der Photonen kleiner als Anzahl der Elektronen im Target
- Photondefinitionswahrscheinlichkeit verbindet diese beiden Größen
- Essentiell zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes

Literatur

- Verwendete Literatur

- Diplomarbeiten

⇒ [AS] Axel Schmidt

⇒ Kathrin Fornet-Ponse

⇒ Jürgen Wißkirchen

⇒ Holger Eberhardt

- CB-ELSA / TAPS Note: Nr 3.

- CB-ELSA Note N° 9

- Seminarvortrag I. Stefan Patzelt

A Dimensionsloses Einheitensystem

$$- \hbar = c = m_e = 1$$

- Erhalte ursprüngliche Einheiten durch geeignete Multiplikation

$$\Rightarrow \text{Längen: } \hbar / m_e c$$

$$\Rightarrow \text{Impulse: } m_e c$$

$$\Rightarrow \text{Energien: } m_e c^2$$