

Partialwellenanalyse

Marc Schiereck

21. November 2007

Überblick

- 1 Resonanzen
- 2 Partialwellenentwicklung
- 3 Polarisationsobservablen
- 4 Beispiel: Partialwellenzerlegung im Gebiet der Δ -Resonanz

Anregungsspektrum des Nukleons

- Das Nukleon ist kein Punktteilchen, sondern setzt sich aus Konstituenten (Quarks) zusammen.
- Dies äußert sich in der Ausdehnung, dem Formfaktor und dem Anregungsspektrums des Nukleons.
- Dieser Vortrag beschäftigt sich damit Informationen über das Anregungsspektrum zu erhalten.

Erinnerung: Klassisches Bild einer Resonanz

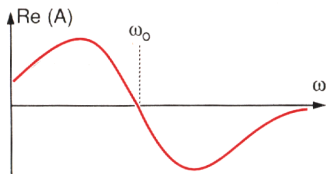
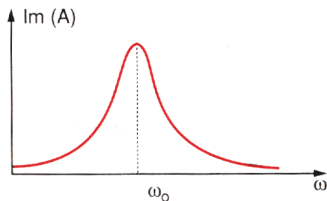
- erzwungene Schwingung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K \exp i\omega t$$

- Lösung: $A \cdot \exp(i\omega t)$
- Amplitude A :

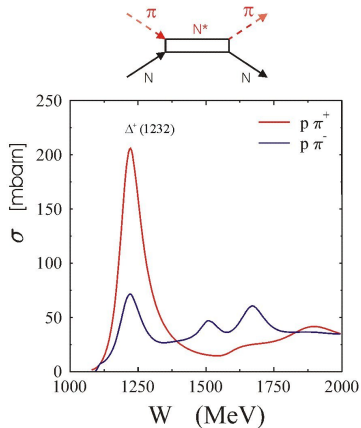
$$A = \frac{K \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

ω : Anregungsfrequenz
 ω_0 : Eigenfrequenz
 γ : Dämpfung
 K : Amplitude



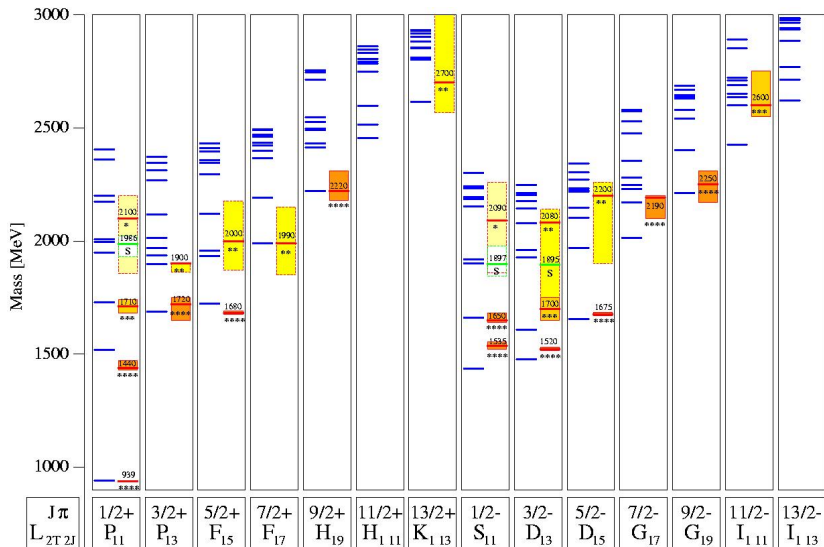
Messungen

- Bisher: Messung von $\pi N \rightarrow \pi N$ -Streuung.

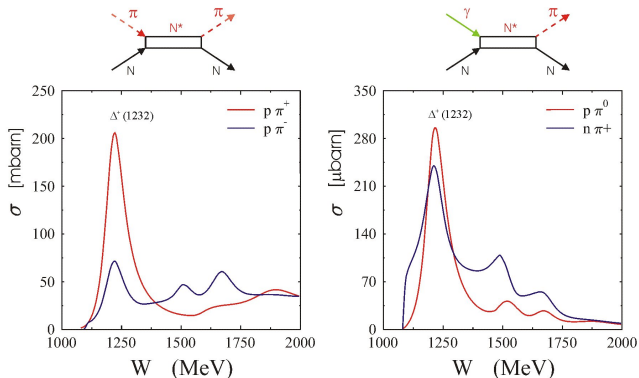


Resonanzspektrum des Nukleons

- Vergleich: Experiment \leftrightarrow Modell; viele Resonanzen nicht gemessen



Vergleich πN -Streuung mit Photoproduktion

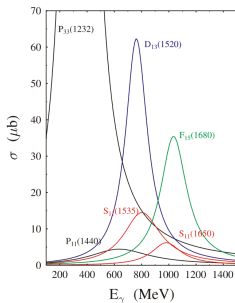


• darum: u. a. Messung von

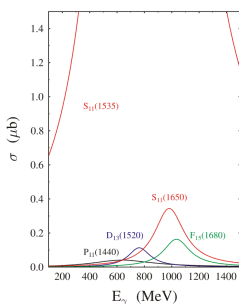
- ▶ $\gamma + N \rightarrow \pi + N$
- ▶ $\gamma + N \rightarrow \eta + N$

Photoproduktion

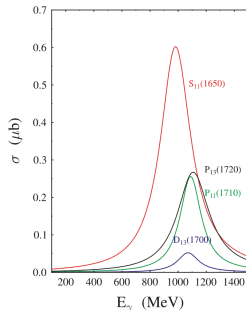
Pion-Production



Eta-Production



Kaon-Production



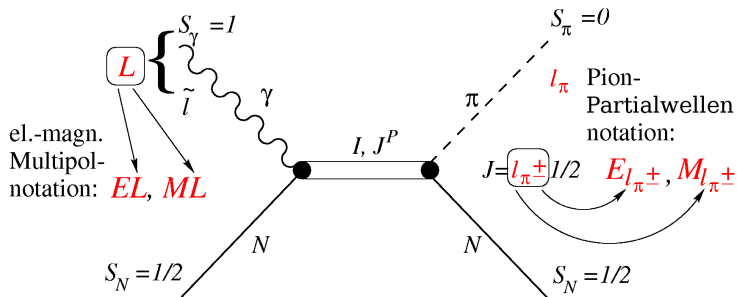
- Untersuchung von weiteren Zerfallskanälen
- sinnvoll, falls Resonanz schwach an einen Kanal (z. B. $\pi N \rightarrow \pi N$) koppelt

Photoproduktion \rightarrow Partialwellen

- Beschreibung dieser Prozesse
- Pion-Photoproduktion \Rightarrow einlaufende Photonen und auslaufende Pionen
- sinnvoll: Notation, die dies berücksichtigt
- Einführung von Partialwellen
- Photonen-Multipole \rightarrow Pion-Partialwellen

Partialwellenschreibweise

- einlaufende Photonen mit Drehimpuls L : $\{EL, ML\}$



- Im Endzustand ist der Gesamtdrehimpuls $l_\pi \pm \frac{1}{2}$: $\{E, M\}_{l_\pi \pm}$ (E und M werden vom Photon übernommen)

Drehimpuls- und Paritätserhaltung

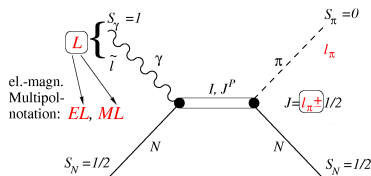
- Drehimpulserhaltung:

$$L \pm \frac{1}{2} = J = l_{\pi} \pm \frac{1}{2}$$

- Paritätserhaltung:

$$\text{EL: } (-)^L = (-)^{l_{\pi}+1}$$

$$\text{ML: } (-)^{L+1} = (-)^{l_{\pi}+1}$$



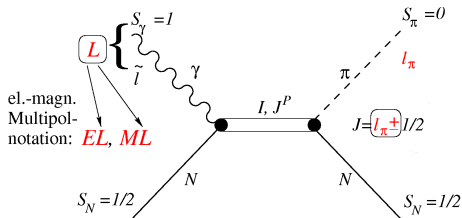
Insgesamt folgt damit:

$$\text{EL} \Rightarrow |L - l_{\pi}| = 1$$

$$\text{ML} \Rightarrow L = l_{\pi}$$

Beispiele für Partialwellen mit $L = 1, 2$

Photon	J	l_π	Partialwelle
E1	$\frac{1}{2}$	$0, \cancel{X}$	E_{0+}
	$\frac{3}{2}$	$\cancel{X}, 2$	E_{2-}
M1	$\frac{1}{2}$	$\cancel{0}, 1$	M_{1-}
	$\frac{3}{2}$	$1, \cancel{X}$	M_{1+}
E2	$\frac{3}{2}$	$1, \cancel{X}$	E_{1+}
	$\frac{5}{2}$	$\cancel{X}, 3$	E_{3-}
M2	$\frac{3}{2}$	$\cancel{X}, 2$	M_{2-}
	$\frac{5}{2}$	$2, \cancel{X}$	M_{2+}

Partialwellen: $\mathcal{M}_{l_\pi \pm}$ 

$$EL \Rightarrow |L - l_\pi| = 1$$

$$ML \Rightarrow L = l_\pi$$

Resonante Partialwellen

- Wie hängen Partialwellen und Resonanzen zusammen?
- Man führt folgende Schreibweise für Resonanzen ein:

$$\mathbf{1}_{\pi} \left(\begin{matrix} M \\ 21 \ 2J \end{matrix} \right)$$

- $\Delta(1232)$ -Resonanz: $P_{33}(1232)$

l_{π}	Bahndrehimpuls des Pions
l	Isospin der Resonanz
J	$= l_{\pi} \pm \frac{1}{2}$ Gesamtdrehimpuls
M	Masse der Resonanz

Zusammenhang Resonanzen \leftrightarrow Partialwellen

Partialwellen: $\mathcal{M}_{l\pi\pm}$

Resonanzen:
 $l_{\pi 2l 2J}(M)$

EL $\Rightarrow |L - l_{\pi}| = 1$
 ML $\Rightarrow L = l_{\pi}$

Bezeichnung	l	J	l_{π}	$M[\text{MeV}]$	Γ_{π}/Γ	Γ_{η}/Γ	Partialwellen
$P_{33}(1232)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1232	0,99	0	E_{1+}, M_{1+}
$P_{11}(1440)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1462	0,69	–	M_{1-}
$D_{13}(1520)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	1524	0,59	0,001	E_{2-}, M_{2-}
$S_{11}(1535)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1544	0,40	0,50	E_{0+}
$S_{11}(1650)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1659	0,89	0,03	E_{0+}

Observablen

- Nun müssen Observablen gefunden werden, die sich dazu eignen die Partialwellen zu bestimmen.

- Dabei stellt sich die Frage, wieviele Observablen benötigt werden, um den Prozess vollständig zu beschreiben.

Benötigte Anzahl an Observablen

- Pion-Nukleon-Streuung

$$\pi + N \rightarrow \pi + N$$

Spin: $0 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \pm\frac{1}{2}$

- 4 Möglichkeiten

- Pion-Photoproduktion

$$\gamma + N \rightarrow \pi + N$$

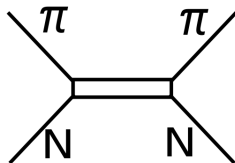
Spin: $\pm 1 \quad \pm\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \pm\frac{1}{2}$

- 8 Möglichkeiten

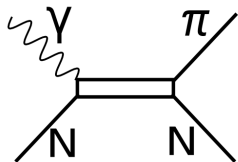
- Paritätserhaltung: Anzahl auf die Hälfte reduziert.

- D. h. für die Photoproduktion: Es sind 4 komplexe Größen zu bestimmen, um die Reaktion eindeutig festzulegen.

- $\pi N \rightarrow \pi N$

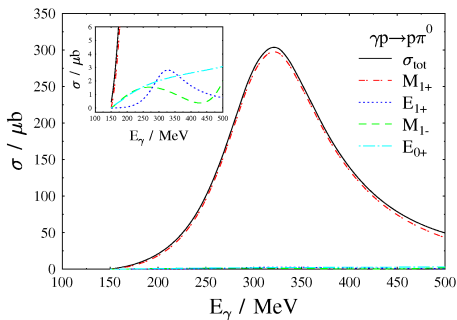


- $\gamma N \rightarrow \pi N$



Totaler Wirkungsquerschnitt

- Reaktion $\gamma p \rightarrow p\pi^0$



$$\sigma \approx |M_{1+}|^2 + |E_{1+}|^2 + |E_{0+}|^2$$

Problem: einige Partialwellen sehr dominant

Lösung: Observablen mit Interferenztermen

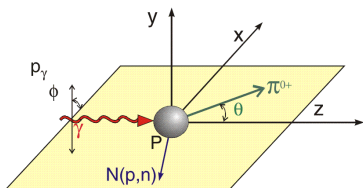
$$|M_{1+}|^2 + |E_{1+}|^2$$

$$M_{1+} E_{1+}$$

Wirkungsquerschnitt mit Polarisationsfreiheitsgraden

- Man verwendet Polarisationsobservablen.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^0}{d\Omega} [1 - p_T \Sigma \cos 2\phi]$$



p_T linear polarisierte Photonen

Σ Photonasymmetrie

Übersicht über Polarisationsobservablen

Photon		Target		
		x	y	z
unpolarisiert	σ	0	T	0
linear polarisiert	$-\Sigma$	H	(-P)	-G
zirkular polarisiert	0	F	0	-E

- 4 komplexe Größen \Rightarrow 8 unabhängige Observablen notwendig.
- Damit wäre modellunabhängige Partialwellenanalyse möglich.
- Bei $\pi N \rightarrow \pi N$ ist eine vollständige Analyse möglich.
- Dies ist bei Pion-Photoproduktion bislang noch nicht möglich.
- Diese Observablen sind empfindlich für Interferenzterme.
 - ▶ $\Sigma \leftrightarrow M_{1+} \cdot E_{1+}$ $\Delta(1232)$ -Resonanz
 - ▶ $T \leftrightarrow M_{1+} \cdot E_{0+}$ $S_{11}(1535)$ -Resonanz
 - ▶ $G \leftrightarrow M_{1+} \cdot M_{1-}$ $P_{11}(1440)$ -Resonanz

Wie erhält man die Partialwellen?

- Es existieren vier komplexe Größen F_i , durch die man die Observablen ausdrücken kann.

$$\frac{d\sigma^0}{d\Omega} = f [F_1(W, \theta_\pi^*), F_2(W, \theta_\pi^*), F_3(W, \theta_\pi^*), F_4(W, \theta_\pi^*)]$$

$$\Sigma = g [F_1(W, \theta_\pi^*), F_2(W, \theta_\pi^*), F_3(W, \theta_\pi^*), F_4(W, \theta_\pi^*)]$$

$$T = h [F_1(W, \theta_\pi^*), F_2(W, \theta_\pi^*), F_3(W, \theta_\pi^*), F_4(W, \theta_\pi^*)]$$

- Schwerpunktsenergie W und π -Winkel θ_π^* im Schwerpunktsystem genügen als Parameter der F_i .
- Diese F_i lassen sich nun nach Partialwellen $E_{l\pm}(W)$, $M_{l\pm}(W)$ und Legendre-Polynomen mit $\cos\theta_\pi^*$ als Parameter entwickeln.

Partialwellenentwicklung allgemein

- kugelsymmetrisches Problem \Rightarrow Partialwellenentwicklung möglich
- d. h. Entwicklung einer Funktion $F(W, \theta)$ in der Form

$$F(W, \theta) = \sum_{l=0} \mathcal{M}_l(W) P_l(\cos \theta)$$

\mathcal{M}_l Partialwellen

P_l Legendre Polynome

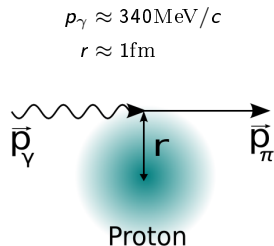
- Eine Partialwellenzerlegung kann bei Kräften mit geringer Reichweite schon nach wenigen Summanden abgebrochen werden.
- daraus: Zusammenhang Messgrößen \leftrightarrow Partialwellen

Partialwellentwicklung im Bereich der Δ -Resonanz

- Pion-Photoproduktion am Proton
- Bereich der Δ -Resonanz
- endliche Ausdehnung des Protons und der Δ -Resonanz
- d. h. Partialwellentwicklung kann früh abgebrochen werden
- es reichen s - und p -Wellen
- Informationen über folgende Partialwellen:

$$l_\pi = 0: E_{0+}$$

$$l_\pi = 1: M_{1+}, M_{1-}, E_{1+}$$



$$p_\pi \approx 200 \text{ MeV}/c$$

$$\vec{l}_\pi = \vec{r} \times \vec{p}_\pi$$

$$l_\pi = 1 \text{ fm} \cdot 200 \text{ MeV}/c$$

$$\hbar c \approx 200 \text{ MeV fm}$$

$$\Rightarrow l_\pi = 1 \hbar$$

Anwendung auf die F_i

- Partialwellenentwicklung der $F_i(W, \theta_\pi^*)$
- Aufteilung in energieabhängige Partialwellen und Winkelanteil

$$F_1 = \sum_{l=0}^{\infty} [lM_{l+}(W) + E_{l+}(W)] P'_{l+1}(x) \\ + [(l+1)M_{l-}(W) + E_{l-}(W)] P'_{l-1}(x)$$

$$F_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [(l+1)M_{l+}(W) + lM_{l-}(W)] P'_l(x)$$

$$F_3 = \sum_{l=1}^{\infty} [lE_{l+}(W) - M_{l+}(W)] P''_{l+1}(x) + [E_{l-}(W) + M_{l-}(W)] P''_{l-1}(x)$$

$$F_4 = \sum_{l=2}^{\infty} [M_{l+}(W) - E_{l+}(W) - M_{l-}(W) - E_{l-}(W)] P''_l(x)$$

Nur s und p-Wellen

- In diesem Fall kann man die Entwicklung also bei $l = 1$ abbrechen und erhält:

$$F_1 = E_{0+} + (M_{1+} + E_{1+})3 \cos \theta_{\pi}^*$$

$$F_2 = 2M_{1+} + M_{1-}$$

$$F_3 = 3(E_{1+} - M_{1+})$$

$$F_4 = 0$$

- Zusammenhang zwischen den F_i und dem Wirkungsquerschnitt (ohne Polarisation):

$$\frac{d\sigma^0}{d\Omega}(W, \theta_\pi^*) = \frac{q}{k} \left[|F_1|^2 + |F_2|^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_\pi^* (|F_3|^2 + |F_4|^2) - \operatorname{Re}\{2 \cos \theta_\pi^* F_1^* F_3 - \sin^2 \theta_\pi^* (F_1^* F_4 + F_2^* F_3 + \cos \theta_\pi^* F_3^* F_4)\} \right]$$

- Einsetzen der Partialwellenentwicklung in s und p -Wellen ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx A + B \cos \theta + C \cos^2 \theta$$

mit

$$A = |E_{0+}|^2 + \frac{9}{2}|E_{1+}|^2 + \frac{5}{2}|M_{1+}|^2 + |M_{1-}|^2 \\ + \operatorname{Re}\{M_{1+}^* M_{1-}\} - 3\operatorname{Re}\{E_{1+}(M_{1+} - M_{1-})^*\}$$

$$B = 2\operatorname{Re}\{E_{0+}(3E_{1+} + M_{1+} - M_{1-})^*\}$$

$$C = \frac{9}{2}|E_{1+}|^2 - \frac{3}{2}|M_{1+}|^2 - 3\operatorname{Re}\{M_{1+}^* M_{1-}\} + 9\operatorname{Re}\{E_{1+}(M_{1+} - M_{1-})\}$$

- In A und C ist der Interferenzterm $E_{1+}M_{1+}$ zu finden.
- dominanter Term $|M_{1+}|^2$ noch vorhanden

Photonasymmetrie

- linear polarisierter Photonenstrahl + unpolarisiertes Target

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} [1 - p_T \Sigma \cos 2\phi]$$

- Damit erhält man:

$$\Sigma(\theta_\pi^*) \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_\pi^*) / \sin^2 \theta_\pi^* = \frac{q}{k} A_\Sigma$$

mit

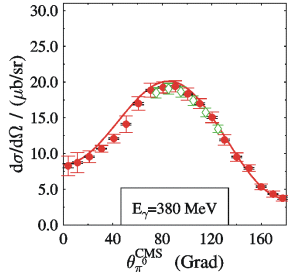
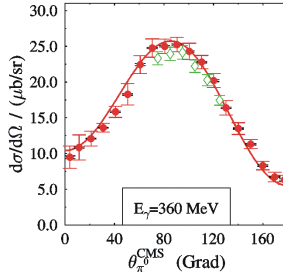
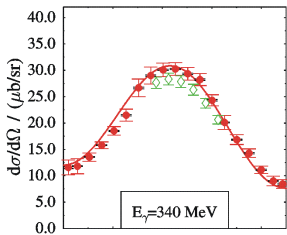
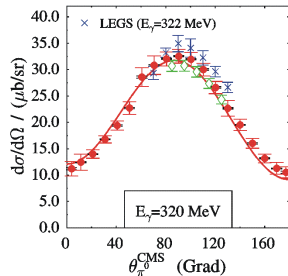
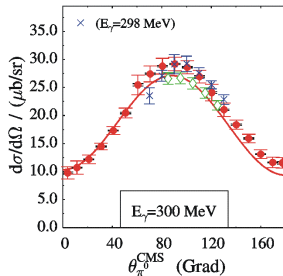
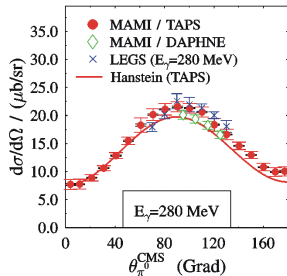
$$A_\Sigma = -3 \left(\frac{3}{2} |E_{1+}|^2 - \frac{1}{2} |M_{1+}|^2 - \text{Re} \{ E_{1+}^* (M_{1+} - M_{1-}) + M_{1+}^* + M_{1+}^* M_{1-} \} \right)$$

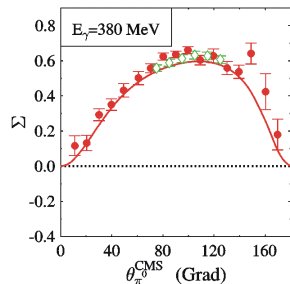
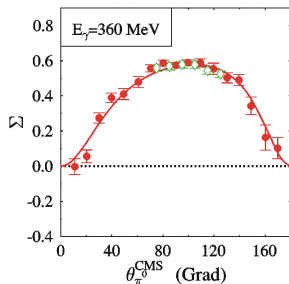
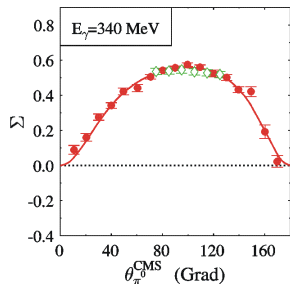
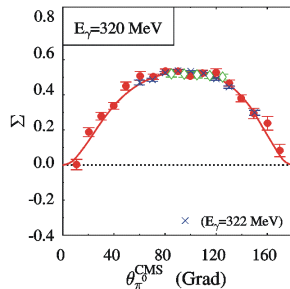
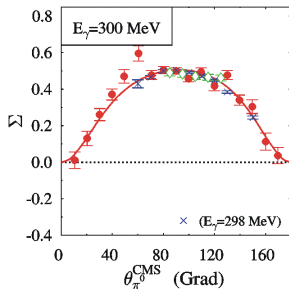
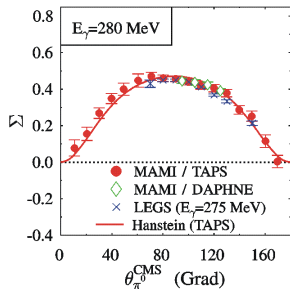
- $|M_{1+}|^2$ ist immer noch vorhanden.
- Photonasymmetrie viel genauer bestimmbar \Rightarrow kein Problem
- Grund: Messung von Σ nur über Zählraten

Bestimmung der Partialwellen

- $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, Σ bestimmt
- daraus A, B, C, A_Σ bestimmt
- Diese sind Funktionen der Partialwellen $E_{0+}, M_{1+}, M_{1-}, E_{1+}$.
($A(E_{0+}, M_{1+}, M_{1-}, E_{1+})$ usw.)
- Nach diesen Partialwellen kann man auflösen.

Differentielle Wirkungsquerschnitte; $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$



Photonasymmetrie ; $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ 

Erinnerung: Klassisches Bild einer Resonanz

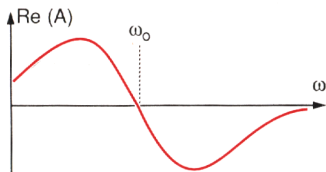
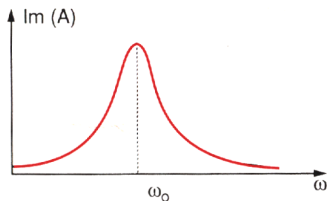
- erzwungene Schwingung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K \exp i\omega t$$

- Lösung: $A \cdot \exp(i\omega t)$
- Amplitude A :

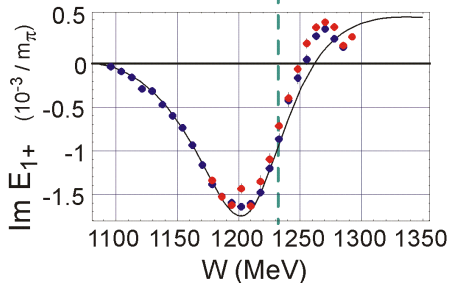
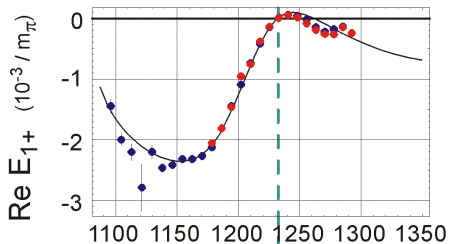
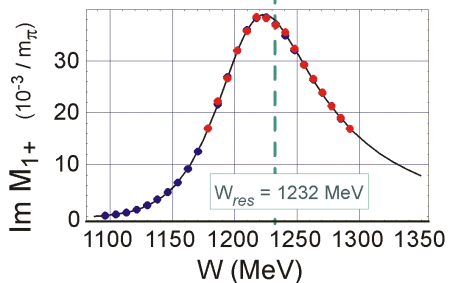
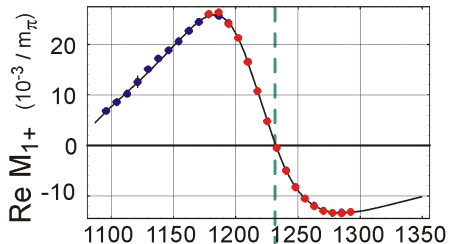
$$A = \frac{K \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

ω : Anregungsfrequenz
 ω_0 : Eigenfrequenz
 γ : Dämpfung
 K : Amplitude



P_{33} -Partialwellen

- energy dep. (global) fit, Hanstein et al
- ◆ energy indep. (local) fit, Hanstein et al
- ◆ exp. analysis, Krahn et al, Mainz 1997



Zusammenfassung

- Messung mit Photoproduktion um Zugang zu mehr Zerfallskanälen als bisher zu erhalten.
- Es werden mehr Observablen zur vollständigen Partialwellenanalyse benötigt.
- Dabei will man die resonanten Partialwellen bestimmen; diese werden teilweise stark von anderen Partialwellen überlagert.
- Zur Lösung dieses Problems werden Polarisationsobservablen verwendet.
- Diese Polarisationsobservablen sind empfindlich auf Interferenzterme wie z. B. $M_{1+} \cdot E_{1+}$.
- Aus ihnen lassen sich die gewünschten Partialwellen bestimmen.
- Vorstellung eines Beispiels in Form eines durchgeführten Experiments.

Fermi-Watson-Theorem

- Partialwellen komplexwertige Funktionen \Rightarrow Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil hilfreich

- ▶ Bei Pion-Photoproduktion: Fermi-Watson-Theorem:

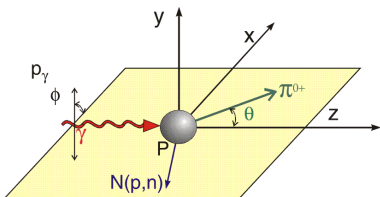
$$\mathcal{M}'_{l\pm}(W) = |\mathcal{M}'_{l\pm}(W)| e^{i\delta_a + in\pi}$$

- ▶ δ_a ist die πN -Streuphase.
- ▶ Für die resonanten Partialwellen der $\Delta(1232)$ -Resonanz gilt:

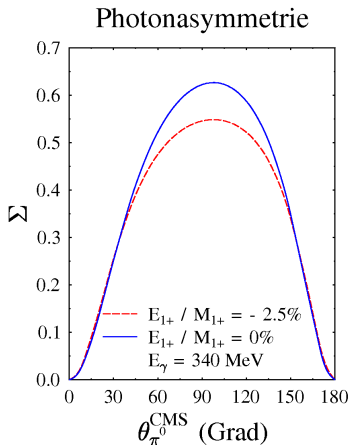
$$\begin{aligned} M_{1+} &= |M_{1+}| \exp(i\delta_{P_{33}}) \\ E_{1+} &= -|E_{1+}| \exp(i\delta_{P_{33}}) \end{aligned}$$

- ▶ Kennt man $\delta_{P_{33}}$ benötigt man nur noch zwei zusätzliche Größen zur Festlegung von M_{1+} und E_{1+} .

Photonasymmetrie



$$\begin{aligned} \Sigma(\theta_{\pi}^*) &= \frac{1}{\rho_T} \frac{(d\sigma^{\perp}/d\Omega)(\theta_{\pi}^*) - (d\sigma^{\parallel}/d\Omega)(\theta_{\pi}^*)}{(d\sigma^{\perp}/d\Omega)(\theta_{\pi}^*) + (d\sigma^{\parallel}/d\Omega)(\theta_{\pi}^*)} \\ &= \frac{1}{\rho_T} \frac{N^{\perp}(\theta_{\pi}^*) - N^{\parallel}(\theta_{\pi}^*)}{N^{\perp}(\theta_{\pi}^*) + N^{\parallel}(\theta_{\pi}^*)} \end{aligned}$$



► Zurück